

1905.

MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE.

№ 15.

ANNALEN
DER
P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 18. HEFT 5.

DER GANZEN REIHE 323. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RONTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 28. Dezember 1905.)

Inhalt.

	Seite
1. G. C. Schmidt. Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren	869
2. Gerhard Glage. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber	904
3. Allvar Gullstrand. Über Astigmatismus, Koma und Aber-ration. (Hierzu Taf. VIII.)	941
4. Gottlieb Kučera. Über die von den sekundären β - und γ -Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation	974
5. W. Wien. Über die Energie der Kathodenstrahlen im Ver-hältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen	991
6. Max Reinganum. Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur	1008
7. H. Greinacher. Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung	1020
8. Johannes Friedel. Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung	1031
9. Max Wien. Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen.	1049
10. W. Holtz. Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz	1054
11. W. Holtz. Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart	1057
12. Richard Thölldt. Die Bestimmung der galvanischen Pola-risation während des Schlusses des Stromes	1061
13. M. P. Rudzki. Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. A. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Be-wegung und des Foucaultschen Pendelversuches“	1070
14. E. Gehrke. Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter (Hierzu Taf. VIII Figg. 2 u. 3)	1074
15. Max Wien. Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell ver-laufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors“	1077
16. W. v. Ignatowsky. Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“	1078
Namenregister zum Jahrgang 1905	1079

Manuskripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Berlin N.W. 7, Neue Wilhelmstr. 16.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Ein fast neues, guterhaltenes

Photometer nach L. Weber

(Schmidt & Haensch, Berlin 1897)

ist wegen Entbehrlichkeit billigst zu verkaufen.

Realschule von **Dr. Plähn**, Waldkirch i. Br.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. Über *Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren*; von G. C. Schmidt.

(Abhandlung 1.)

§ 1. *Einleitung.* Im Jahre 1879 fand Hittorf¹⁾, daß der Durchgang einer kontinuierlichen Entladung den Zustand des in der Entladungsröhre enthaltenen Gases derart verändert, daß auch in *transversaler* Richtung Entladungen leichter hindurchgehen, ganz ähnlich wie dies de la Rive²⁾ für den Lichtbogen nachgewiesen hatte. Diese Versuche sind von Hertz³⁾, Schuster⁴⁾, Arrhenius⁵⁾, E. Wiedemann und H. Ebert⁶⁾, J. Stark⁷⁾ und H. A. Wilson⁸⁾ bestätigt und erweitert worden. Es hat sich hierbei ergeben, daß der Transversalstrom bei gleicher Stärke des Hauptstromes am kleinsten im dunklen Kathodenraum und am größten im Glimmlicht ist; im positiven Licht ist er größer als im Faradayschen dunklen Raum. Gegen den aus diesen Versuchen ziemlich allgemein gezogenen Schluß, daß die Verschiedenheit der Intensität des Transversalstromes von dem größeren oder geringeren Leitvermögen der einzelnen Teile der Entladung herrühre, sind namentlich von G. Wiedemann⁹⁾ und C. A. Mebius¹⁰⁾ Einwände erhoben worden. Selbst wenn nämlich die Sonden, durch welche der

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 553 (614) 1879.

2) De la Rive, Arch. de Genève 26. p. 177. 1866. Comp. rend. 60. p. 1002 und 1686. 1866.

3) H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 782 (815). 1883.

4) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 42. p. 371. 1887.

5) S. Arrhenius, Wied. Ann. 32. p. 545. 1887.

6) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. 35. p. 220. 1888.

7) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 622. 1903; siehe auch Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902.

8) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) 49. p. 505. 1900.

9) G. Wiedemann, Lehre von der Elektr. 4. Abt. I. p. 504—505. F. Vieweg, Braunschweig 1885.

10) C. A. Mebius, Wied. Ann. 59. p. 696—697. 1896.

Transversalstrom fließt, sich in derselben Ebene befinden, so kann man doch nicht einen Zweig des Primärstromes vermeiden, wenn die beiden Sonden mit den Polen der Nebenbatterie verbunden werden; sie bekommen dann ungleiche Potentiale und deformieren daher die Äquipotentialflächen in der Röhre. Dazu kommt, daß, wie Mebius nachgewiesen hat, die Sonden sich polarisieren, und zwar in den einzelnen Teilen der Entladung verschieden stark. Die ganze Anordnung von Hittorf, die später von den oben erwähnten Forschern ebenfalls angewandt worden ist, liefert daher Resultate, welche von vielen Umständen abhängen, die sich nicht vollständig übersehen lassen.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung¹⁾ habe ich die Hypothese, daß der dunkle Kathodenraum der „Verarmungsbereich“ an Ionen sei, durch Versuche zu bestätigen gesucht²⁾. Meine Methode bestand im wesentlichen darin, die Zeit zu messen, welche eine mit einer Kapazität verbundene Sonde bedurfte, um sich auf das in den einzelnen Teilen der Entladung herrschende Potential zu laden. Es ergab sich hierbei, daß tatsächlich die Konzentration der Ionen im dunklen Kathodenraum sehr klein war; die Hypothese konnte somit bestätigt werden.

Auch gegen diese Methode läßt sich, ebenso wie gegen die der Transversalströme, der Einwand erheben, daß die Sonde sich polarisiere und infolgedessen alle Messungen nur qualitativer Natur seien. Die folgende Arbeit, welche sich eng an die vorhergehende anschließt, wurde unternommen, um diese Polarisation genauer zu untersuchen.

§ 2. *Theorie.* Daß eine Polarisation beim Transversalstrom auftritt, ist von Mebius einwandsfrei nachgewiesen worden. Wie dieselbe zustande kommt, darüber ist bis jetzt noch keine klare Vorstellung entwickelt worden. A. Schuster³⁾ nimmt an,

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 12. p. 622. 1903.

2) Herr J. Stark macht (Ann. d. Phys. 13. p. 375. 1904) darauf aufmerksam, daß J. J. Thomson zuerst eine ähnliche Hypothese aufgestellt hat. Ich bedaure, daß mir dieselbe entgangen war.

3) A. Schuster hat (Lum. électrique 46. p. 371. 1892; Beibl. 27. p. 157. 1893) bei H, N, O, Wasserdampf und verschiedenen anderen zusammengesetzten Gasen keine Polarisation beobachten können, wohl aber bei einigen Kohlenwasserstoffen. Aus der Tatsache, daß nur die letzteren

daß die Kathode sich polarisiert in ähnlicher Weise, wie dies bei flüssigen Elektrolyten der Fall ist, einer Ansicht, der sich auch Mebius anschließt. Aber alle Versuche, diese Polarisation in ähnlicher Weise wie bei flüssigen Elektrolyten nachzuweisen, sind bisher gescheitert; wenn daher wirklich die Kathode sich beim Stromdurchgang veränderte, wie dies bei den flüssigen, polarisierenden Elektrolyten der Fall ist, so müßte die Geschwindigkeit der Depolarisation eine sehr große sein. In röntgenisierter Luft oder Luft, die durch Kathoden-, Becquerelstrahlen usw. ionisiert worden ist, hat man bisher ebenfalls keine Polarisation gefunden, im Gegenteil, da die mathematisch abgeleiteten Formeln mit den Versuchen ohne Annahme einer Polarisation gut übereinstimmen, so kann man mit Sicherheit schließen, daß wenn überhaupt eine Veränderung der Elektroden vorhanden ist, dieselbe so klein sein muß, daß sie vernachlässigt werden kann.

Nach O. Lehmann¹⁾ sollen sich die negativen Ionen an der Anode leicht entladen können, während die positiven ihre Ladung nur schwierig an die Kathode abgeben, so daß sich um diese eine mehr oder minder ausgedehnte Hülle positiv elektrischen Gases lagert. Hiergegen läßt sich einwenden, daß ein negativ geladener Körper in den Kanal-, Kathoden-, Röntgen- und Becquerelstrahlen seine Ladung sehr schnell verliert, und zwar, soweit aus den allerdings mehr qualitativen Beobachtungen hervorgeht, annähernd ebenso schnell, als wenn derselbe positiv geladen ist.

Im Anschluß an meine vorige Arbeit habe ich mir eine andere Vorstellung von dem Wesen der Polarisation gebildet.²⁾ Genau so wie bei flüssigen Elektrolyten der Durchgang eines kräftigen Stromes sich die Konzentration in der Lösung dicht um die Elektroden ändert, da Wanderung und Diffusion nicht

Gase diese Erscheinung zeigen, geht mit Sicherheit hervor, daß wir es hier mit Ausnahmefällen zu tun haben, die wohl in Zusammenhang stehen mit der leichten Zersetzbarkeit der betreffenden Gase und dem Niederschlagen der Zersetzungsprodukte auf die Elektroden. Von anderen Forschern ist niemals eine Polarisation beobachtet worden. J. J. Thomson u. Rutherford, *Phil. Mag.* 42. p. 392. 1897.

1) O. Lehmann, *Verhandl. Naturw. Ver. Karlsruhe* 15. p. 35. 1902.

2) G. C. Schmidt, *Ann. d. Phys.* 12. p. 624—626. 1903.

so viel Ionen zuführen, als aus der Lösung gedrängt werden, und hierdurch eine Gegenkraft auftritt, welche sich der Strombewegung widersetzt, ebenso muß bei Gaselektrolyten an den Transversalelektroden eine *Verarmung an Ionen* eintreten, da die Ionen sich nicht unendlich rasch Neubilden und zu den Elektroden diffundieren. Offenbar wird die Verarmung bei gleicher Stromstärke des Transversalstromes um so kleiner sein, je größer die Oberfläche der Sonden, je größer die Konzentration der Ionen usw. ist. *Die Polarisierung der Elektroden ist also hiernach ein Maß für die Verarmung.* Diese Theorie, welche ich später noch ausführlicher besprechen werde, habe ich im folgenden geprüft. Zu dem Zweck wird zunächst nachgewiesen, daß eine Polarisierung im Sinne von Schuster in Entladungsröhren nicht auftritt. Darauf wird gezeigt, daß die Polarisierung der Elektroden von der Stromdichte, also von der Größe der Sonden und der Konzentration der Ionen abhängt. In einer späteren Abhandlung soll die Beziehung zwischen Druck und Polarisierung, Geschwindigkeit der Ionen und Polarisierung festgestellt und schließlich aus allen diesen Daten die relative Anzahl der Ionen in den einzelnen Teilen der Entladung berechnet werden.

§ 3. *Versuche über die Veränderung der Elektroden beim Stromdurchgang.* In § 2 habe ich die Hypothese von Schuster über das Wesen der Polarisierung bei Gasen skizziert. Die Elektroden sollten sich in ähnlicher Weise beim Stromdurchgang polarisieren, wie dies bei flüssigen Elektrolyten der Fall ist. Wenn diese Hypothese richtig wäre, so könnte der Umstand, daß es bisher noch nicht gelungen ist, nach ähnlichen Methoden wie bei letzteren die Polarisierung nachzuweisen, nur von der viel größeren Geschwindigkeit der Depolarisation herühren. Ich habe deswegen zunächst versucht, ob man vielleicht eine Spur von Änderung der Elektroden nachweisen könnte, wenn man die Zeit zwischen Loslösung der Batterie und Messung der Polarisierung sehr klein machte. Für diese Versuche wurde der folgende Unterbrecher benutzt.

a) *Der Unterbrecher:* Der Unterbrecher diente dazu, den Hauptstrom einen Augenblick zu schließen, darauf zu unterbrechen und unmittelbar hierauf den Nebenstrom zu schließen.

Auf einem Brett *AB* (Fig. 1) von 30 cm Länge und 40 cm

Breite waren zwei Holzleisten CD und EF befestigt. CD trug vier durch Ebonit wohlisolierte Klemmen 1, 2, 3, 4, in welchen vier elastische Federn befestigt waren. An die letzteren waren Kupferdrähte angelötet, welche um die Ebonitstäbe mehrere Male gewunden waren und unten in vier mit Quecksilber gefüllte Glasnäpfchen Hg_1 , Hg_2 , Hg_3 , Hg_4 tauchten; um dieselben waren Tüten aus Papier befestigt, damit das Quecksilber bei der Rotation der Scheiben nicht allzusehr herausgespritzte. Die Ebonitstäbe M und M_1 standen durch Messingstäbe L und L_1 (L_1 ist in der Figur nicht zu sehen) mit den runden Holzscheiben S und S_1 , welche beide auf einer gemeinsamen

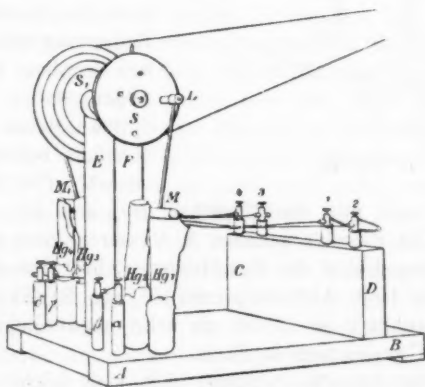


Fig. 1.

Achse befestigt waren, derart in Verbindung, daß bei der Rotation die auf M und M_1 befestigten Kupferdrähte abwechselnd in das Quecksilber tauchten und wieder herausgehoben wurden. Die Scheiben wurden durch einen Elektromotor in Rotation versetzt. In die Quecksilbernäpfe Hg_3 und Hg_4 tauchten die Zuleitungsdrähte γ , δ des Haupt-, und in Hg_1 , Hg_2 die des Polarisationsstromes α , β . Die Anordnung war nun so getroffen, daß, wenn die Drahtenden von M in das Quecksilber tauchten, bei M_1 der Strom unterbrochen wurde. Bei der Drehung der Scheiben, deren Geschwindigkeit durch einen Widerstand bez. durch Befestigung des Riemens auf verschieden

großen konzentrischen Scheiben von S_1 reguliert werden konnten, war so abwechselnd der Hauptstrom geschlossen, während der Polarisationsstrom unterbrochen war und umgekehrt.

b) Die *Schaltung* zeigt die nebenstehende Fig. 2. R ist das Entladungsrohr, von denen zwei zur Verwendung kamen, Länge 20 cm, 4 cm Breite bez. 30 cm Länge, 5 cm Breite. Die Anode und die Kathode waren hinten mit Glimmer bedeckt und in bekannter Weise beweglich angeordnet. Das

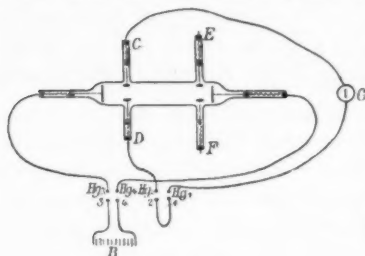


Fig. 2.

Rohr enthielt vier Querelektroden, Platten aus Messing, Kupfer- und Platindrähte von verschiedenem Durchmesser, deren Bedeutung später beschrieben werden wird. Dieselben waren bis an die Spitze in Glas gehüllt und ebenfalls beweglich angeordnet. Die Anode und

Kathode waren mit den Näpfchen Hg_3 und Hg_4 verbunden (Fig. 1). Die Klemmschrauben 1, 2 waren kurz geschlossen. Die Zuleitungsdrähte des Hauptstromes, herrührend von einer Batterie von 1000 Akkumulatoren B (Fig. 2) führten zu den Klemmschrauben 3, 4. G ist ein sehr empfindliches Galvanometer von Carpentier in Paris.

Wie der Apparat arbeitet, läßt sich leicht übersehen. Wenn die beiden Scheiben rotieren, so ist eine Zeitlang der Hauptstrom geschlossen, dadurch, daß die Drahtenden von M in die Quecksilbernäpfchen tauchen. Der Strom fließt von der Hauptbatterie durch die Klemme 3 zur Anode, von dort nach der Kathode und dann durch das Quecksilbernäpfchen Hg_4 zur Batterie zurück. Im nächsten Augenblick wird der Hauptstrom unterbrochen; jetzt tauchen aber die beiden Kupferdrahtenden von M in die Quecksilbernäpfchen Hg_1, Hg_2 , wodurch der Nebenstrom geschlossen ist, welcher bei Vorhandensein eines Polarisationsstromes im Galvanometer einen Ausschlag hervorrufen mußte.

Da das Galvanometer und die Röhre auf ein hohes Potential geladen wurden, so muß für eine sehr gute Iso-

lation Sorge getragen werden. Alle dick mit Kautschuk umspannenen Drähte waren durch Luft gespannt, wo sie befestigt waren, wurden sie durch Glasröhren isoliert. Die Verbindungsstellen bestanden aus gut isolierten Quecksilbernäpfchen.

Anfangs hatte ich große Schwierigkeiten zu überwinden, die zum größten Teil von elektrostatischen Einflüssen im Galvanometer herrührten; erst nachdem ich alle nichtleitenden Teile aus demselben entfernt hatte, gelang es mir sichere Messungsergebnisse zu erhalten.

Die Beobachtungen wurden mit Luft, Stickstoff, Wasserstoff und Sauerstoff angestellt. Die Darstellung der Gase war die übliche.

Um den Apparat zu prüfen, namentlich ob Induktionswirkungen die Messungsergebnisse beeinflussen, wurden zunächst eine Reihe von Vorversuchen angestellt, deren Beschreibung ich übergehe. Störungen traten nur auf, wenn die Rotation allzu groß war (ca. 400 in der Minute); es wurde dann nämlich das Quecksilber in den Näpfchen stark umhergeschleudert, so daß eventuell der Hauptstrom noch geschlossen war, während der Nebenstrom schon in Tätigkeit trat. Es fand dann stets ein außerordentlich starker Ausschlag der Galvanometernadel statt (Stromstoß), wodurch natürlich die Messungen fehlerhaft wurden. Bei mittleren Umdrehungsgeschwindigkeiten nahm die Nadel eine ganz feste Lage ein. Daß der Apparat gut funktionierte, konnte auch dadurch nachgewiesen werden, daß sich die Leitfähigkeit einer wässrigen CuSO_4 -Lösung, welche in das Entladungsröhr gegossen war, ohne Schwierigkeit bestimmen ließ.

c) *Ergebnisse:* Es ergab sich, daß selbst bei der größten Rotationsgeschwindigkeit keine Spur von einem Polarisationsstrom nachzuweisen war. Somit ist 0,025 Sek. nach Öffnen des Hauptstromes der Polarisationsstrom, wenn er überhaupt vorhanden ist, kleiner als 10^{-11} Amp.

Gegen diese Versuche ließe sich der Einwand erheben, daß unmittelbar nach Öffnen des Hauptstromes die Ionen in der Entladungsröhre so schnell verschwinden, daß das Gas in der Entladungsröhre ein Nichtleiter wird und daß der Stromkreis deswegen nicht geschlossen ist. Um diesen Einwand zu prüfen, wurde in den Nebenschließungskreis ein Element geschaltet, sofort trat ein Galvanometeraussschlag ein.

Hg_1 und Hg_2 wurden mit CD bez. EF unter Einschaltung eines Galvanometers und einer Batterie verbunden, so daß jetzt also unmittelbar nach Öffnen des Hauptstromes ein Transversalstrom zustande kam. Von den vielen so angestellten Messungen teile ich nur eine einzige mit.

$$p = 0,4 \text{ mm. } I = 0,41 \text{ M.-A.}$$

Anzahl der Rotationen in der Minute 200.

Stickstoff.

E.M.K.	Glimmlicht	Dunkler Raum	Positiv	Berechnet ¹⁾
20 Volt	$8 \cdot 10^{-6}$ M.-A.	$8 \cdot 10^{-6}$ M.-A.	$7,5 \cdot 10^{-6}$ M.-A.	$8 \cdot 10^{-6}$
40	18	17	17	17
60	26	26	26	26
80	34	35	34	35
100	43	44	43	44
120	52	53	52	53
140	61	62	61	62
160	71	71	70	71

Aus der Tabelle läßt sich entnehmen, daß der Transversalstrom direkt proportional der angewandten elektromotorischen Kraft ist und daß das Leitvermögen in allen Teilen der Röhre nach Öffnen des Hauptstromes dasselbe ist. Die letztere Tatsache erklärt sich daraus, daß hauptsächlich Ionen, welche sich von der Glaswand allmählich losgelöst haben, das Leitvermögen bewirken. Zugunsten dieser Erklärung sprechen noch eine Reihe von Beobachtungen, welche ich hier übergehe. Jedenfalls ergibt sich aus der Tabelle mit Sicherheit, daß selbst einige Zeit nach Öffnen des Hauptstromes noch genügend Ionen vorhanden sind, um den Polarisationsstrom zwischen den Elektroden herüberzuführen. Ich schließe daher aus der Gesamtheit der Beobachtungen, daß eine *Polarisation ähnlich wie bei flüssigen Elektrolyten bei gasförmigen nicht auftritt*. Zugunsten dieses Satzes spricht ferner die Tatsache, daß das Kathoden- und Anodenpotential innerhalb sehr weiter Grenzen unabhängig von der Temperatur ist, was nicht der Fall sein könnte, falls die Polarisation von einer sich an den Elektroden anlagernden

1) Berechnet nach der Formel $i = k E$, wo k eine Konstante, i die Stromstärke und E die elektromotorische Kraft bedeuten.

Gas- oder Ionenschicht herrührte, da dieselbe bei höherer Temperatur vertrieben werden würde.

§ 4. *Methode der Messung der Polarisation:* Die benutzte Anordnung hatte Ähnlichkeit mit der von Mebius¹⁾ benutzten. Von einer Batterie B (Fig. 3), welche im ganzen 1000 Akkumulatoren enthält, geht der Schließungskreis, der *Hauptbogen* durch ein Galvanometer G , einen Stromwender bez. Stromunterbrecher aus Paraffin u , den Widerstand R von in Amylalkohol gelöstem

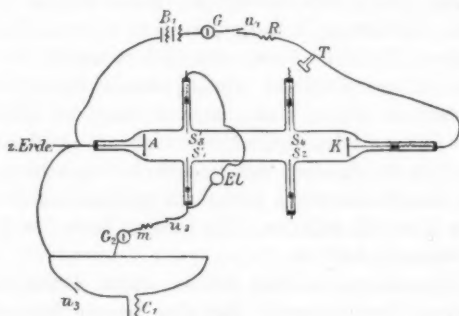


Fig. 3.

Jodkadmium, die Vakuumröhre und ein Telefon T . Die eine Sonde S_1 befindet sich in der *Nebenleitung*; in dieser sind ein Stromwender bez. Unterbrecher u_2 , ein Galvanometer G_2 , ein Widerstand m eingeschaltet. Der letztere ist verbunden mit der Wheatstoneschen Brücke. Die letztere besteht aus der Batterie C_1 , kleine Akkumulatoren, deren Zahl je nach Wunsch geändert werden konnte, einen Stromunterbrecher u_3 . Die eigentliche Brücke bestand aus einem ca. 2 m langen vertikal stehenden Glasrohr, in dem sich eine verdünnte Kupfersulfatlösung befand. Als Elektroden benutzte ich Kupferstäbe. Der verschiebbare Kontakt wurde hergestellt durch einen Kupferdraht, der durch Glas isoliert war und nur am unteren Ende zu einem horizontalen Kreis umgebogen war, der aus dem Glasrohr herausragte. Durch Verschieben des Kontaktes der Brücke konnte eine beliebige Spannung in der Nebenleitung eingeschaltet werden und so eventuell die Spannung von S_1 gegen die zur

1) C. A. Mebius, Wied. Ann. 59. p. 697—698. 1896.

Erde abgeleitete Kathode bez. Anode kompensiert werden. Gerade gegenüber S_1 befand sich eine zweite Sonde S_2 . Beide wurden mit dem Elektrometer El verbunden. Zur Messung der Spannung benutzte ich die Methode von Hittorf: Laden eines Glimmerkondensators, der nachher durch ein Galvanometer entladen wurde.

Das *Vakuumrohr* hatte eine Länge von 45 cm und einen Durchmesser von 2,5 cm. Von den Hauptelektroden AK war die eine fest, die andere beweglich. Diese war an einem verschiebbaren Glaskörper befestigt, in dem sich ein Hohlzylinder aus Eisenblech befand. Wenn ein Elektromagnet der äußeren Wand des Rohres genähert wurde, wurde der Zylinder angezogen, und auf diese Weise konnte man die Elektrode im Innern des horizontalen Rohres verschieben. Die Leitung nach außen geschah durch einen mit Siegelack eingekitteten Kupferdraht. Die Elektroden waren kreisförmige Platinscheiben, welche eng an das Glasrohr anlagen. Die hintere Seite der Elektroden war mit Glimmer bedeckt.

Die *Nebenelektroden* oder *Sonden* waren Platindrähte von verschiedenem Durchmesser. Bei den letzten Versuchen, wo die Polarisation in den verschiedenen Teilen der Entladung untersucht wurde, besaßen alle den gleichen Durchmesser. Alle waren in bekannter Weise beweglich angeordnet. Sie bewegten sich in engen Glasröhren, die in der Mitte der Seitenröhren durch Asbest befestigt waren. Ihre Lage, d. h. wieviel von der Sonde aus der Röhre herausragte, wurde auf einer unter den Seiten liegenden, in Millimetern eingeteilten spiegelnden Glasskala abgelesen.

Die Zahl der Sonden betrug 14; in der Figur sind der besseren Übersicht wegen nur vier gezeichnet.

Die ganze Leitung war gut isoliert, das Rohr, die Brücke und alle einzelnen Meßinstrumente und ebenso die Nebenbatterie standen auf Paraffin, welches seinerseits auf Glasscheiben befestigt war.

§ 5. *Ausführung und Berechnung der Messungen.* Nachdem die ganze Anordnung auf Isolierung untersucht war und alle Apparate geeicht, wurden die Messungen in folgender Weise ausgeführt. Nachdem der Hauptstrom geschlossen und man sich überzeugt hatte, daß der Strom stetig war, wurde

der Nebenstrom (d. h. der zwischen der Sonde und der zur Erde abgeleiteten Anode bez. Kathode) ebenfalls geschlossen und so lange die Wheastonesche Brücke verstellt, bis kein Strom durch das Galvanometer G_2 floß. Die Sonde und das Gas in ihrer Nähe müssen dann dasselbe Potential haben. Dies folgt unmittelbar daraus, daß ein Transversalstrom von einer Sonde nach einer anderen durch eine Gasstrecke hindurchgehen kann, wie gering auch die elektromotorische Kraft im Schließungsbogen sein mag.¹⁾ Es geht dies auch aus direkten Messungen hervor, wie in den nachfolgenden Tabellen gezeigt werden wird; denn es ist stets, wenn kein Strom durch den Nebenschließungskreis fließt, die am Elektrometer abgelesene Potentialdifferenz zwischen Sonde und der zur Erde abgeleiteten Elektrode gleich der aus der Brücke berechneten.

Wenn darauf der bewegliche Kontakt der Brücke verschoben wurde, so ging ein Strom durch das Galvanometer G_2 . Hatten ursprünglich z. B. die beiden Sonden S_1 und S_2 dasselbe Potential, so bestand jetzt zwischen beiden eine Potentialdifferenz, die sich auch aus der Stellung des beweglichen Kontaktes der Brücke auf folgende Weise berechnen ließ. Wir nennen die Potentiale der Anode, der Sonde und des Gases in unmittelbarer Nähe der Sonde V_A , V_S und V_G , so ist nach dem vorhergehenden $V_S = V_G$ nur dann, wenn kein Strom durch die Nebenleitung fließt. Wie Mebius rechne ich einen Strom, der von der Anode nach der Sonde geht, als positiv, und eine elektromotorische Kraft e Volt, welche in entgegengesetzter Richtung wirkt, gleichfalls als positiv. Wenn ein Strom durch die Nebenleitung fließt, dann ist die Potentialdifferenz P zwischen der Anode und der Sonde in der Nebenleitung

$$(1) \quad V_A - V_S = P = e + m i,$$

wo m der Widerstand in der Nebenleitung bedeutet. Der Wert von P , welcher der Stromstärke Null entspricht, ist nach dem vorhergehenden

$$V_A - V_G.$$

Nehmen wir an, daß für diese Differenz x Volt gemessen sei, so haben wir

$$(2) \quad V_A - V_G = x \text{ Volt.}$$

1) C. A. Mebius, l. c. p. 701; A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 42. p. 371. 1887.

Aus (1) und (2) ergibt sich dann

$$V_S - V_G = K = x - P,$$

wo K die Potentialdifferenz zwischen der Sonde und dem Gase oder das *Kathodengefälle* bedeutet.

Wie aus den nachfolgenden Tabellen hervorgeht, stimmt das so berechnete Kathoden- bez. Anodengefälle mit dem direkt am Elektrometer gemessenen überein, solange die Stromstärke in der Nebenleitung nicht zu groß war. War das letztere der Fall, so traten Verzerrungen ein, die im nächsten Paragraphen geschildert werden sollen.

Die im vorhergehenden benutzte Berechnungsmethode ist identisch mit der von Möbius angewandten; sie gilt, wie man unschwer erkennt, nur so lange, als sich die einzelnen Gebilde der Entladung nicht verzerren, da nur in diesem Fall der Wert V_G derselbe bleibt. Sobald die am Elektrometer abgelesenen und die aus der Brücke berechneten nicht übereinstimmen, hat sich das Gas um die Sonde verändert oder das Gebilde um die Sonde hat sich verzerrt, selbst dann, wenn mit dem Auge kaum eine Veränderung zu sehen ist. Die nachfolgenden Tabellen enthalten eine Reihe solcher Zahlen; zur Konstruktion meiner Kurven und zur Berechnung der Polarisation habe ich sie natürlich nicht benutzt (vgl. § 8 und § 14).

§ 6. *Die Erscheinungen.* Die vielen Verzerrungserscheinungen, welche bei den Transversalströmen auftreten, im einzelnen zu beschreiben, hat keinen Zweck. Ist die Sonde positiv geladen, so ist bei schwachen Strömen und entsprechenden kleinen Anodengefällen nichts Besonderes wahrzunehmen; bei größeren Anodengefällen setzt sich zunächst eine Lichthaut an die Sonde, welche bei Steigung der Stromstärke intensiver wird. Bei welchem Anodengefälle das Leuchten beginnt, ist sehr schwer zu entscheiden, da, wenn die Sonde in Glimmlicht oder positives Licht taucht, diese Gebilde die schwache Lichthaut auf der Sonde nicht in Erscheinung treten lassen. In den folgenden Tabellen habe ich durch ein * angedeutet, wann zuerst ein deutliches Leuchten der Anode zu sehen war. Lagert sich eine Schicht an eine Sonde, so verschmilzt dieselbe allmählich mit dem Licht auf der Sonde, bis schließlich die Schicht die Sonde ganz umgibt. Zu gleicher

Zeit ändern sich auch alle anderen Gebilde in der Röhre. Ist die Sonde negativ geladen, so kann bei großem Kathodengefälle das positive Licht ganz beiseite gedrängt werden. Da alle diese Verzerrungserscheinungen nur bei hohen Potentialen auftreten, die im folgenden kaum berücksichtigt werden, so mögen diese kurzen Andeutungen genügen.

§ 7. *Nachweis, daß für das Anoden- bez. Kathodengefälle dieselben Werte erhalten werden, gleichgültig, ob die Kathode oder Anode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet ist.* Bevor mit den eigentlichen Messungen begonnen wurde, mußte ermittelt werden, ob bei ein und derselben Sonde bei unverändertem Druck, Entladungspotential und Stromstärke des Hauptstromes für das Kathoden- bez. Anodengefälle des Transversalstromes dieselben Werte erhalten wurden, gleichgültig, ob die Anode oder Kathode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet war; oder mit anderen Worten, es mußte festgestellt werden, daß die Anoden- und Kathodengefälle dieselben Werte behalten, wenn das Entladungspotential, Druck, Stromstärke des Hauptkreises, Länge der Sonde und das Entladungsgebilde, in welches die Sonde taucht, unverändert bleiben. Es war dies tatsächlich der Fall, wie aus den folgenden drei Tabellen hervorgeht. In denselben bedeuten p den Druck, II das Entladungspotential, I die Stromstärke des Hauptkreises in Milliampère, i die Stromstärke des Nebenkreises in Ampère. $\cdot 10^{-6}$, A das Anodengefälle und K das Kathodengefälle.

Tabelle I.

Positive Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke 210 Volt.

$p = 0,9$ mm. $I = 1,4$. $II = 490$ Volt.

A	i	A	i	K	i	K	i
1,1	$1,4 \cdot 10^{-6}$	11,9	27,4	8,4	0,10	76,2	0,79
3,7	3,6	13,6	33,0	11,2	0,14	79,3	0,84
4,0	5,2	15,0	40,2	14,6	0,19		
4,3	7,8	19,1	55,8	20,2	0,25		
5,6	11,2	19,3	60,3	23,7	0,36		
7,5	13,3	22,0	77,6	31,5	0,42		
8,1	16,8	21,8	84,3	55,4	0,59		
8,9	19,1	23,1	99,1	55,8	0,63		
11,4	23,6	23,1	115,1	61,3	0,71		

Tabelle II.

Positive Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke
500 Volt.

$$p = 0,9 \text{ mm. } I = 1,4. \quad II = 490 \text{ Volt.}$$

A	i	A	i	K	i	K	i
0,9	$1,0 \cdot 10^{-6}$	12,9	28,3	6,2	0,11	86,0	0,85
2,4	3,0	13,6	34,1	9,4	0,16	93,0	0,89
3,7	6,5	15,2	41,0	15,3	0,24		
4,5	8,2	17,5	48,6	23,4	0,33		
6,1	10,4	18,3	57,2	32,1	0,42		
7,5	14,4	19,1	61,4	48,2	0,57		
8,3	16,0	22,1	80,4	57,1	0,64		
9,6	19,4	22,8	111,2	80,2	0,81		
10,1	20,0						

Tabelle III.

Negative Elektrode zur Erde. Spannung in der Wheatstoneschen Brücke
500 Volt.

$$p = 0,9 \text{ mm. } I = 1,4. \quad II = 490 \text{ Volt.}$$

A	i	A	i	K	i	K	i
1,5	$2,5 \cdot 10^{-6}$	12,3	34,4	8,3	0,14	89,6	0,93
1,9	3,3	16,1	50,6	17,5	0,25		
2,7	4,8	19,8	71,3	29,5	0,39		
3,6	6,9	21,8	100,8	35,2	0,45		
5,0	11,1	22,4	158,5	60,1	0,68		
6,1	14,2	22,5	235,8	68,3	0,75		
6,5	17,3	22,3	280,8	76,4	0,81		
9,8	24,4			88,4	0,89		

Die Anoden- und Kathodengefälle sind aus der Brückenstellung berechnet worden.

Die drei aus den Beobachtungen konstruierten Kurven fallen nicht genau zusammen, — die Abweichungen betragen ungefähr 1 Volt für ein und dieselbe Stromstärke — doch erklären sich dieselben leicht daraus, daß sich im Laufe der Zeit der Gasinhalt etwas änderte und ferner sind die Ablesungsfehler bei Tab. II und III, bei denen in der Nebenzelle eine Spannung von 500 Volt herrschte, viel größer als bei Tab. I, wo die Spannung nur 210 Volt betrug.

Trotzdem man somit aus den Tabellen entnehmen kann, daß man für die Kathoden- und Anodenpotentiale dieselben Werte erhält, gleichgültig ob man die Anode oder Kathode des Hauptstromes zur Erde ableitet, habe ich doch stets mit Ausnahme der im folgenden erwähnten einzelnen Fälle die Anode zur Erde abgeleitet, da dann wegen des geringen Anodenpotentials die Nebenbatterie nicht so groß zu sein brauchte.

§ 8. *Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektroden im positiven Licht.* Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß die Polarisation für verschiedene Stromstärken in dem Nebenzweig gemessen wurde, darauf wurde die Länge der Sonde verändert und wiederum die Polarisation gemessen etc.

In den folgenden Tabellen bedeuten *I* und *II* die Stromstärke und Potentialdifferenz im Hauptstromkreis, *i* die Stromstärke im Nebenzweig, E_1 die Polarisation gemessen mit dem Elektrometer, E_2 die Polarisation berechnet aus der Stellung des Kontakts der Wheatstoneschen Brücke, *p* den Druck und schließlich *L* die Länge der Sonde.

Tabelle IV.

$I = 0,47 \text{ M.-A.}$ $p = 0,35.$ $II = 450 \text{ Volt.}$ $L = 3,0 \text{ mm.}$

$i \cdot 10^{-8}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
0,38	1,3	1,5	1,4	-0,09	2,7	2,3	2,5
1,10	2,9	2,1	2,5	-0,21	6,8	7,8	7,3
2,16	4,6	4,6	4,6	-0,23	10,0	10,1	10,0
3,51	7,3	8,3	7,8	-0,29	32,0	33,2	32,6
4,32	9,0	9,4	9,2	-0,35	41,4	41,3	41,3
5,81	12,4	12,5	12,4	-0,45	48,1	50,2	49,2
7,0	13,5	12,9	13,2	-0,57	55,4	59,0	57,2
10,1	19,0	19,6	19,3*				
10,5	19,5	20,2	19,9				
14,3	22,2	22,1	22,1				
15,1	23,0	22,7	22,9				
30,2	23,4	24,4	23,4 ¹⁾				
40,8	23,6	25,3	23,6 ¹⁾				

* bedeutet, daß sich deutlich Licht um die Sonde gelagert hat.

1) Bei diesen Zahlen sind nur die Elektrometerausschläge berücksichtigt worden, da dieselben zuverlässiger sind als die aus der Brücke gewonnenen elektromotorischen Kräfte. Beide weichen beträchtlich voneinander ab (vgl. § 5 und § 14).

Tabelle V.

 $I = 0,47 \text{ M.-A. } p = 0,35. \text{ II} = 450 \text{ Volt. } L = 12 \text{ mm.}$

$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
1,1	0,72	0,68	0,70	-0,24	1,3	1,5	1,4
2,5	1,3	1,3	1,3	-0,49	6,7	6,3	6,5
3,8	1,8	2,2	2,0	-0,72	12,5	13,5	13,0
4,7	2,8	2,4	2,6	-1,03	26,5	27,9	27,2
6,2	3,8	3,0	3,4	-1,30	38,8	40,8	39,8
8,5	4,6	5,0	4,8	-1,5	49,2	51,1	50,0
11,3	6,5	6,0	6,3				
14,6	8,0	8,2	8,1				
17,3	9,6	9,6	9,6				
21,2	11,0	12,0	11,5				
26,3	13,4	14,6	14,0				
31,8	16,6	16,0	16,3				
39,8	19,4	18,0	18,7*				
44,0	20,2	21,6	20,2 ¹⁾				
52,2	21,3	22,9	21,3 ¹⁾				
70,8	23,4	24,4	23,4 ¹⁾				
91,3	23,3	26,8	23,3 ¹⁾				

Tabelle VI.

 $I = 0,47 \text{ M.-A. } p = 0,35. \text{ II} = 450 \text{ Volt. } L = 32 \text{ mm.}$

$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel	$i \cdot 10^{-6}$	E_1	E_2	Mittel
	Volt	Volt	Volt		Volt	Volt	Volt
3,2	0,8	0,9	0,8	-0,23	0,5	0,6	0,55
5,6	1,7	1,7	1,7	-0,41	2,2	2,0	2,1
9,3	2,4	2,8	2,6	-0,67	4,0	4,8	4,4
13,4	2,7	2,9	2,8	-0,83	5,9	5,6	5,8
20,1	4,4	5,0	4,7	-1,20	9,0	9,0	9,0
31,8	6,1	5,5	5,8	-1,27	10,2	10,0	10,1
42,6	7,5	7,7	7,6	-2,58	26,0	29,0	27,5
55,1	10,5	10,9	10,2	-3,20	34,3	36,4	35,3
74,3	14,6	14,0	14,3*	-4,01	44,4	46,0	45,2
104,8	17,9	18,9	17,9*	-4,40	50,1	52,0	51

1) Vgl. Anm. 1 auf p. 883.

Den Verlauf der Kurven stellt die Fig. 4 dar.

Aus denselben läßt sich entnehmen:

1. Wenn eine Sonde als Anode dient, d. h. wenn ein Strom von der Sonde nach dem Gase geht, so ist ihr Potential höher als das des Gases. Das Umgekehrte gilt, wenn die Sonde Kathode ist, also ein Strom von dem Gase in die Sonde geht.

2. Anoden- und Kathodengefälle sind für kleine Stromstärken klein und wachsen mit steigender Stromstärke, und zwar das Kathodengefälle viel schneller als das Anodengefälle.¹⁾

3. Bei einem und demselben Anoden- bez. Kathodengefälle ist die Stromstärke proportional der Größe der Sonde oder bei gleicher Stromdichte ist die Polarisation die gleiche.

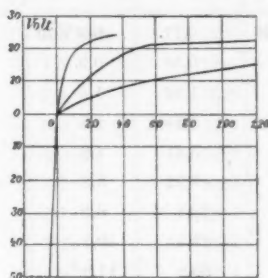


Fig. 4.

Wenn wir annehmen, daß die Polarisation von der Verarmung an Ionen herrührt, und weiter berücksichtigen, daß die Beweglichkeit der negativen Teilchen größer ist als die der positiven, so lassen sich diese Ergebnisse leicht verstehen. Wegen der geringen Beweglichkeit der positiven Ionen kann eine viel größere Verarmung eintreten, wenn die Sonde negativ ist, als wenn sie positiv geladen ist, infolgedessen kann die Polarisation im ersten Fall viel größer werden als im zweiten. Bei doppelter Länge der Sonde stehen doppelt so viel Ionen zur Verfügung, infolgedessen ist bei derselben Stromstärke die Verarmung, also auch die Polarisation kleiner. Ist dagegen die Stromdichte die gleiche, so ist es auch die Verarmung und daher auch die Polarisation.

1) Satz 1 und 2 sind bereits von Mebius l. c. gefunden worden.

§ 9. *Beziehung zwischen Polarisisation und Größe der Elektroden im Faradayschen dunklen Raum.* Um Platz zu sparen, teile ich für die Polarisisation nur den Mittelwert (mit E bezeichnet) mit; die übrigen Bezeichnungen sind identisch mit den vorhergehenden.

Tabelle VII.

$I = 0,43 \text{ M.-A.}$ $II = 500 \text{ Volt.}$ $p = 0,47 \text{ mm.}$

$L = 5 \text{ mm}$		$L = 15 \text{ mm}$		$L = 32 \text{ mm}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,51	1,7 Volt	0,21	0,5 Volt	2,11	0,9 Volt
1,93	4,5	0,53	0,9	5,36	1,8
2,70	7,1	1,62	1,6	8,94	2,9
4,29	9,3	3,54	2,8	11,3	3,4
6,12	11,1	5,61	4,2	15,2	4,7
8,59	14,7*	7,92	5,8	21,3	6,7
11,3	15,6	10,1	6,9	29,8	9,2
15,8	17,9	15,4	10,1	34,3	10,6
21,4	20,6	20,3	11,9*	42,5	12,4*
24,8	21,3	23,6	13,3	49,9	13,8
30,1	22,4	25,8	14,1	53,2	16,6
42,2	23,8	31,3	15,6	64,1	17,6
54,0	24,6	35,8	16,7	79,3	18,0
63,9	24,9	41,2	17,8	92,9	20,3
72,0	25,0	50,0	19,5	106,1	21,2
-0,13	10,3	64,2	21,1	121,4	22,0
-0,21	15,1	85,8	22,3	-0,51	1,6
-0,30	37,4	110,5	22,9	-0,84	7,5
-0,36	47,1	-0,15	1,5	-1,21	13,4
-0,38	52,2	-0,26	7,6	-1,63	21,2
-0,41	55,8	-0,41	15,2	-1,89	23,5
		-0,68	34,8	-2,21	39,0
		-0,73	36,2	-2,62	56,5
		-0,91	44,8		
		-1,10	50,9		

Auch hier gelten dieselben Beziehungen wie in § 8; auch hier ist bei ein und demselben Anoden- bez. Kathodenpotential die Stromdichte gleich.

§ 10. Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektroden im Glimmlicht.

Tabelle VIII.

$I = 0,45$ M.-A. $II = 480$ Volt. $p = 0,53$ mm.

$L = 10$ mm		$L = 32$ mm	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
3,56	1,1 Volt	6,6	0,61 Volt
5,81	1,5	13,4	1,1
7,89	2,4	20,3	1,6
11,3	3,3	41,4	3,7
15,8	4,0	52,3	4,2
20,3	5,2	68,6	5,8
25,0	6,3	83,5	7,3
31,4	7,8	95,0	7,6
44,6	10,2	120,4	8,4
51,5	11,4	161,0	10,3
63,0	13,8	196,0	10,7
75,3	15,2	328,0	18,3
84,6	15,8	-1,1	2,1
98,3	17,9	-3,0	13,3
115,1	19,8	-4,6	23,2
158,0	21,8	-5,1	27,0
297,0	22,9	-5,9	31,3
365,0	22,8	-6,2	33,0
-0,31	1,1	-6,9	38,1
-0,65	6,4	-7,0	39,6
-0,88	13,4		
-1,12	17,3		
-1,46	28,2		
-1,81	37,1		
-1,90	40,2		

Auch hier gelten wieder dieselben Gesetzmäßigkeiten wie in § 8. Doch zeigen die Kurven einige Abweichungen von dem Gesetz, daß bei gleicher Polarisierung die Stromdichte die gleiche ist. Aus den Kurven entnehme ich als Beispiele folgende Zahlen: Bei + 5 Volt ist $i = 9,1$ bez. = 28, bei + 10 Volt ist $i = 42$ bez. = 150, bei + 18,3 Volt ist $i = 100$ bez. = 328; diese Stromstärken stehen nahezu im Verhältnis 1:3,2, entsprechen also den Längen der Sonden. Bei - 10 Volt ist $i = 8$ bez. = 26; das Verhältnis ist hier wieder angenähert 1:3,2. Bei - 40 Volt ist $i = 8$ bez. = 72; die Stromstärken stehen also im Verhältnis 1:4. Es erhebt sich bei dieser Beobachtungsreihe naturgemäß die Frage, ist das Gesetz über die Beziehung zwischen Stromdichte und Polarisierung nur angenähert gültig, oder rühren diese Abweichungen nur von Beobachtungsfehlern her. Ich bin geneigt, das letztere anzunehmen. Die Beobachtungen kosten Zeit, da, bis alles stetig sich eingestellt hatte, stets einige Zeit verstrich. Nun konnte man deutlich wahrnehmen, wie nach längerer Benutzung die Sonden sich mit einem braunen Anflug bedeckten. Hierdurch änderte sich das Anoden- und Kathodenpotential; und wenn ich auch nie so hohe Zahlen für das Anodenpotential wie Hr. Reiger¹⁾ beobachtet habe, so habe ich doch Zahlen für das maximale Anodenpotential von 33 Volt im positiven Licht erhalten, während die meisten übrigen Beobachtungsreihen 22—23 Volt gaben. Es ist ja bekannt²⁾, in wie ausnehmend hohem Maße das Anoden- und Kathodenpotential von der Reinheit der Elektrode abhängt. Ich glaube, daß hierauf die Abweichungen zum Teil oder ganz sich zurückführen lassen. Aus demselben Grunde habe ich auch eine Reihe von Beobachtungsreihen verworfen; so gab mir z. B. eine Beobachtungsreihe im Glimmlicht für das maximale Anodenpotential 32,6 Volt bei einer Länge der Sonde von 2 mm; als die Sonde auf 10 mm verlängert wurde, sank es auf 22,8 Volt. Die beiden Beobachtungsreihen zeigen zwar auch die große Abhängigkeit der Polarisierung von der Größe der Sonde, sind aber nicht miteinander vergleichbar. Um diese Verunreinigung der Sonden

1) R. Reiger, Habilitationsschrift Erlangen, p. 75. 1905.

2) C. A. Skinner, Wied. Ann. 68. p. 752. 1899.

möglichst zu eliminieren, habe ich meinen Apparat öfters auseinander genommen und alles geputzt; eine deutlich sichtbare Verunreinigung trat aber manchmal schon nach kurzer Zeit wieder auf. Sicher würde dieselbe geringer gewesen sein, wenn alles Fett, Siegellack etc. vermieden worden wäre, dann wäre aber die Röhre nicht zu reinigen gewesen. Außerdem glaube ich auch, daß, solange wir nicht wissen, was wir eigentlich messen, und worauf es im wesentlichen ankommt, diese angenäherten Zahlen genügen.

§ 11. *Beziehung zwischen Polarisation und Größe der Elektrode im dunklen Kathodenraum.* Bei diesen Versuchen wurde die negative Elektrode des Hauptstromes zur Erde abgeleitet und das Potential der Sonde mit Hilfe des Elektrometers gegen die zur Erde abgeleitete Elektrode gemessen. Da das Kathodenpotential groß ist, so mußten eine größere Anzahl von Akkumulatoren bis 440 Volt an die Brücke angelegt werden. Durch den verhältnismäßig großen Strom wurde die Brücke etwas erwärmt. Als kein Strom hindurchging, war die Potentialdifferenz zwischen Sonde und Kathode 176 Volt; als man durch Veränderung der Brücke Strom durch die Sonde hindurchfließen ließ, stieg bez. sank das Potential, je nachdem Strom aus der Sonde in das Gas oder umgekehrt floß. Es liegt auf der Hand, daß die Ablesungsfehler bedeutend größer sind als in den vorhergehenden Beobachtungsreihen, denn die Polarisation ergibt sich jetzt aus der Differenz zweier großen Zahlen.

Viel größere Fehler wurden aber durch einen anderen Umstand hervorgerufen, nämlich dadurch, daß sich der Gasinhalt im Laufe der Zeit, während der Strom hindurchging, etwas änderte. Es war dies deutlich am Steigen des Potentials der Sonde und im Kleinerwerden des dunklen Kathodenraumes festzustellen. Um diese Fehler möglichst zu beseitigen, wurde sehr schnell eingestellt und abgelesen und ferner durch Ablesen von nicht allzu vielen Punkten nur der allgemeine Verlauf der Kurve festgelegt. Bei den früheren Beobachtungsreihen spielte eine Änderung der Größe des Gebildes, z. B. des Glimmlichtes oder positiven Lichtes, nicht eine so große Rolle, denn die Sonde befand sich, selbst wenn das Gebilde ein klein wenig seine Lage oder Größe änderte, trotzdem

immer mitten darin. Beim dunklen Kathodenraum, der an und für sich nicht allzu groß sein durfte, weil sonst die Potentialdifferenz zwischen Sonde und Kathode und damit die Zahl der Akkumulatoren in der Brücke zu groß geworden wären, bewirkte eine kleine Änderung der Größe des Gebildes dagegen, daß die Sonde dem Glimmlicht sehr nahe rückte, wobei natürlich die Gefahr vorlag, daß man gar nicht die Polarisierung im dunklen Kathodenraum, sondern an der Grenze des Glimmlichtes maß.

Tabelle IX.

$I = 0,46$. $II = 720$ Volt. $p = 0,12$ mm.

$L = 4$ mm		$L = 12$ mm		$L = 30$ mm	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,17	24 Volt	0,23	11 Volt	0,39	8 Volt
0,24	44	0,55	39	0,51	12
0,31	60	0,79	61	0,96	28
0,48	97	1,1	83	1,46	47
0,71	139	1,4	118	2,11	76
0,90	164	1,6	140	2,90	127
1,01	190	-0,21	13	3,4	181
-0,11	21	-0,53	27	-0,36	11
-0,25	34	-0,75	38	-0,59	16
-0,45	49	-0,91	42	-0,91	20
-0,95	82	-1,3	54	-1,43	-28
-1,33	98	-2,0	74	-1,55	-36
		-3,9	103	-3,3	66

Mit Hilfe dieser Zahlen wurden Kurven konstruiert und die den elektromotorischen Kräften entsprechenden Stromstärken abgelesen. Dieselben stehen in der nachfolgenden Tabelle verzeichnet; unter L_2/L_1 und L_3/L_1 stehen die Verhältniszahlen der Stromstärken, welche zu den verschiedenen langen Sonden gehören: $L_1 = 4$ mm, $L_2 = 12$ mm, $L_3 = 30$ mm; i_1, i_2, i_3 bedeuten die Stromstärken, welche zu den Sonden L_1, L_2, L_3 gehören.

Tabelle X.

E	$i_1 \cdot 10^{-7}$	$i_2 \cdot 10^{-7}$	$i_3 \cdot 10^{-7}$	L_2/L_1	L_3/L_1
10 Volt	0,51	1,5	3,7	3	7,0
20	1,2	2,9	7,5	2,4	6,3
40	2,0	5,4	12,5	2,7	6,2
60	2,8	7,8	17,4	2,8	6,3
80	3,5	10,0	21,8	3,0	6,0
100	4,9	12,5	25,1	2,6	5,1
120	5,1	1,5	28,0	3,0	5,5
-20	0,9	3,0	7,7	3,3	8,5
-40	2,6	8,5	17,5	3,2	7,0
-60	5,0	15,0	29,0	3,0	5,8
-80	8,3	25,0	—	3,0	—

Aus den letzten beiden Kolonnen läßt sich entnehmen, daß das Gesetz: *bei gleicher Stromdichte ist die Polarisation die gleiche*, auch hier gilt. Wären keine Beobachtungsfehler vorhanden, so müßten die beiden letzten Kolonnen konstant gleich 3 bez. 7,5 sein. Zwar sind die Abweichungen besonders in der zweiten Kolonne recht beträchtlich, doch sind, wie schon oben erwähnt, gerade hier die Beobachtungsfehler relativ groß, so daß man die Konstanz wohl noch als genügend bezeichnen kann. Auf den Verlauf der Kurven werde ich im Zusammenhang mit den früheren in § 16 zu sprechen kommen.

§ 12. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke im Hauptstromkreis im positiven Licht.* Im vorhergehenden Paragraphen habe ich das Gesetz, daß die Polarisation von der Größe der Elektrode abhängt, auf die Verarmung zurückgeführt; bei der doppelten Größe der Sonde stehen doppelt soviel Ionen zur Verfügung, infolgedessen muß die Stromstärke die doppelte sein, damit die Verarmung, d. h. die Polarisation die gleiche sei. Dies Gesetz läßt sich noch in anderer Weise prüfen. Verdoppeln wir die Stromstärke im Hauptstromkreis, so würden wir die Anzahl der den Strom führenden Ionen verdoppeln, falls der Gradient überall derselbe blieb. Das letztere ist nun nahezu im Faradayschen dunklen Raum und im Glimmlight erfüllt; im positiven Licht nimmt er mit der Stromstärke etwas ab. Es war also zu erwarten, daß die

Polarisation mit der Stromstärke im Hauptstromkreis zunehmen würde. Die Messungen im positiven Licht ergaben folgendes Resultat.

Tabelle XI.

$p = 0,33 \text{ mm.}$ $L = 30 \text{ mm.}$

$I = 0,42 \text{ M.-A.}$ $H = 460 \text{ V.}$		$I = 0,9 \text{ M.-A.}$ $H = 510 \text{ V.}$		$I = 1,75 \text{ bis } 1,80 \text{ M.-A.}$ $H = 590 \text{ V.}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,57	1,5 Volt	1,41	1,4 Volt	1,7	0,8 Volt
2,54	4,5	3,74	3,6	3,8	2,4
3,16	5,2	6,21	4,7	6,9	3,2
4,48	7,0	9,39	6,6	11,1	4,6
5,80	8,3	12,30	7,8	14,3	5,5
7,6	10,2	16,2	9,7	18,8	6,7
11,1	14,6	21,6	11,9	23,9	7,3
15,3	15,0	29,4	12,6	28,7	8,8
19,2	17,8	35,9	14,1*	35,0	9,5
22,3	19,5*	40,2	15,3	46,1	10,9
27,0	21,0	52,6	17,1	58,3	12,5
40,3	22,1	71,0	19,0	63,1	13,4
-0,41	7,3	80,2	19,8	76,5	14,8
-0,56	20,1	-0,25	2,0	98,3	16,0
-0,73	32,4	-0,28	2,2	99,0	15,8
-0,82	40,9	-0,38	3,7	-0,41	1,1
-0,97	48,3	-0,74	11,4	-0,87	3,6
		-0,85	15	-1,1	5,8
		-1,09	28	-1,6	9
		-1,32	33	-2,1	17
		-1,51	57	-2,4	27
				-2,6	29
				-2,8	34
				-3,1	42
				-3,3	51

Aus der Tabelle geht hervor: im positiven Licht ist die zu einer bestimmten Polarisationsspannung gehörige Stromstärke sehr angenähert proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises.

§ 13. Beziehung zwischen Polarisierung und Stromstärke des Hauptstromkreises im Faradayschen dunklen Raum. Die nachfolgende Tabelle gibt die Messungen wieder.

Tabelle XII.

 $L = 10 \text{ mm. } p = 0,32 \text{ mm.}$

$I = 0,41 \text{ M.-A.}$ $II = 470 \text{ V.}$		$I = 0,86 \text{ M.-A.}$ $II = 490 \text{ V.}$		$I = 1,5 \text{ M.-A.}$ $II = 530 \text{ V.}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,62	1,6 Volt	0,53	1,1 Volt	1,4	0,8 Volt
8,91	9,2	4,82	2,6	9,5	1,9
13,1	12,6	9,3	4,1	16,2	2,5
15,0	15,1*	13,6	5,9	21,0	3,6
18,4	16,5	19,4	7,7	26,4	4,6
21,2	17,3	25,3	9,9	29,8	5,9
23,6	19,0	31,0	10,7	41,0	7,8
27,8	21,7	39,6	14,4*	50,0	8,8
36,2	21,9	50,5	16,2	65,0	13,1*
45,8	22,1	63,2	16,9	72,6	13,9
63,0	22,6	78,9	17,7	98,0	16,8
306,0	23,1	95,1	18,4	140,2	18,1
		110,8	19,3	294,0	19,3
		125,0	20,2	-0,23	2,4
		206,5	20,5	-0,45	9,1
		358,0	21,6	-0,52	10,9
		-0,10	2,6	-0,66	15,8
		-0,27	12,1	-0,77	20,5
		-0,35	15,8	-0,92	30,1
		-0,43	20,1	-1,11	34,3
		-0,68	36,2	-1,60	55,8
		-0,99	60,6	-2,08	76,6

Auch hier findet sich dasselbe Gesetz, welches für das positive Licht galt, wieder bestätigt (vgl. § 12).

§ 14. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke des Hauptstromkreises im Glimmlicht.* Die nachfolgende Tabelle ist wie die vorhergehende angeordnet, nur habe ich als letzte Kolumne noch die aus der Brückenstellung abgeleiteten Polarisationen mit beigelegt, damit man ersehen kann, zu wie unrichtigen Resultaten man kommen kann, wenn man nur diese berücksichtigt (vgl. § 5). Die Abweichungen sind besonders groß für größere Stromstärken im Nebenstromkreis. Da Mebius seine Werte für die Polarisation nur aus den Werten berechnet hat, welche er

mittels einer der Brückenmethode analogen Versuchsanordnung erhielt, so sind seine Zahlen für größere Stromstärken wahrscheinlich nicht richtig.

Tabelle XIII.

$$p = 0,83 \text{ mm. } L = 10 \text{ mm.}$$

$I = 0,44 \text{ M.-A. } II = 420 \text{ V.}$		$I = 1,6 \text{ M.-A. } II = 520 \text{ V.}$		
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$E \text{ (Brücke)}$
1,3	0,9	4,1	0,4	0,4
2,4	1,6	10,3	1,1	1,3
8,9	2,3	30,7	3,0	3,3
17,8	3,1	48,2	3,3	3,8
26,3	3,9	60,0	3,5	6,2
40,5	4,5	95,2	3,6	8,1
88,1	5,2	266,0	3,9	16,3
104,0	6,6	- 1,55	0,3	0,5
132,4	8,1	- 5,8	3,5	3,7
155,9	9,4	- 7,1	6,5	6,9
180,2	10,1	- 9,6	9,5	11,0
220,4	10,9	- 11,7	14,8	16,7
283,0	13,0	- 14,0	19,7	22,1
- 0,03	0,5	- 14,7	21,2	25,6
- 0,61	2,0	- 18,3	28,6	34,3
- 1,09	4,1	- 20,8	34,7	42,1
- 1,23	5,9	- 25,7	46,4	54,5
- 1,71	7,4			
- 2,14	9,5			
- 2,48	11,8			
- 3,04	13,6			
- 3,60	20,8			
- 4,21	25,3			
- 5,00	33,1			
- 8,6	70,6			

Die Kurven gibt Fig. 5 wieder. Das Bild unterscheidet sich sehr wesentlich von den früher erhaltenen, und zwar hauptsächlich dadurch, daß die Kurve mit der größeren Stromstärke ($I = 1,6 \text{ M.-A.}$) ein viel kleineres Maximalanodenpotential hat, als die mit der kleineren Stromstärke; es ist daher natürlich, daß die oberen Teile der Kurve, also die Anodenpotentiale gar

nicht miteinander verglichen werden können. Dagegen zeigen die Kathodenpotentiale wieder dieselbe Gesetzmäßigkeit wie früher: die zu einer bestimmten Polarisationsspannung gehörige Stromstärke ist sehr angenähert proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises. Nun zeigen alle meine Messungen, daß beim Nullpunkt, wo das Kathodenpotential der Sonde in das Anodenpotential übergeht, kein Knick auftritt. Es muß also die obige Gesetzmäßigkeit auch für sehr kleine (genau unendlich kleine) Anodenpotentiale gelten. Es gilt somit auch im Glimmlicht die früher gefundene Abhängigkeit der Polarisation von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Ionen. Ob tatsächlich das maximale Anodenpotential im Glimmlicht verschieden ist, je nach der Stromstärke im Hauptstromkreis, ob nicht vielleicht das Anodenpotential auch hier bis 22 Volt wächst, das zu entscheiden, muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

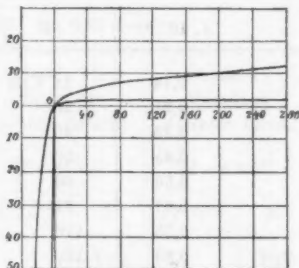


Fig. 5.

§ 15. *Beziehung zwischen Polarisation und Stromstärke des Hauptstromkreises im dunklen Kathodenraum.* Im dunklen Kathodenraum einigermaßen zuverlässige Werte namentlich bei größeren Stromstärken zu erhalten, bereitete sehr große Schwierigkeiten. Um sicher zu sein, daß die Sonde sich nicht im Glimmlicht oder der Grenze des Glimmlichtes befand, mußte der Kathodenraum nicht zu klein sein; es mußte daher ziemlich weit ausgepumpt werden. Im Laufe der Beobachtungsreihe wurde das Vakuum schlechter, damit änderte sich das Gebilde, und Stromstärke und Potentialdifferenz zwischen den beiden Endelektroden des Hauptstromkreises waren häufig am Ende der Beobachtungsreihe nicht identisch mit der am Anfang.

Einigermaßen wurden diese Schwierigkeiten überwunden dadurch, daß ich sehr schnell arbeitete, und nur durch verhältnismäßig wenig Punkte den allgemeinen Verlauf der Kurve festlegte. Die auf- und absteigenden Äste der in Tab. XIV mitgeteilten Kurven stimmen nicht genau miteinander überein,

immerhin läßt sich auch aus diesen Zahlen der Verlauf der Kurve mit großer Sicherheit zeichnen.

Tabelle XIV.

$p = 0,09 \text{ mm.}$ $L = 10 \text{ mm.}$

$I = 0,42 \text{ M.-A.}$ $II = 730 \text{ V.}$		$I = 1,2 \text{ M.-A.}$ $II = 1300 \text{ V.}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
0,14	16 Volt	0,23	5 Volt
0,21	23	0,48	17
0,38	40	0,61	19
0,45	50	0,84	28
0,56	66	0,93	29
0,67	81	1,24	33
0,75	110	1,43	53
0,83	120	1,85	74
0,84	108	2,07	81
0,93	136	2,26	94
1,18	145	2,54	116
1,21	155	3,33	142
-0,21	32	3,41	148
-0,51	42	-0,24	12
-0,73	64	-0,61	21
-0,98	70	-1,1	29
-1,28	75	-1,4	42

Auf den Verlauf der Kurven werde ich in § 16 zu sprechen kommen. Auch hier zeigt sich deutlich, daß die zu einer bestimmten elektromotorischen Kraft gehörige Stromstärke des Nebestromkreises proportional der Stromstärke des Hauptstromkreises ist.

Ich muß bekennen, daß ich überrascht war, daß dieses Gesetz sich auch hier bestätigte, denn bei der größeren Stromstärke im Hauptstromkreis entwickelte sich ein ziemlich intensives Kanalstrahlenbündel, und da diese ionisieren, so glaubte ich, daß die Zahl der Ionen so zunehmen würde, daß die Verhältnisse recht verwickelt werden würden. Daraus, daß dies nicht der Fall ist, läßt sich entnehmen, daß ceteris paribus bei der doppelten Stromstärke die Kanalstrahlen doppelt so intensiv werden und doppelt so stark ionisieren.

§ 16. Vergleich der Polarisation in verschiedenen Teilen der Entladungsröhre. Im vorhergehenden sind die Beziehungen zwischen der elektromotorischen Kraft der Polarisation und Stromstärke bei Änderung der Länge der Sonde und der Stromstärke im Hauptstromkreis festgelegt. Die erhaltenen Kurven in den verschiedenen Gebilden der Entladung, also z. B. im

Tabelle XV.

$I = 0,81 \text{ M.-A.}$ $p = 0,21 \text{ bis } 0,22 \text{ mm.}$

Sonde I Unmittelbar an der Anode		Sonde II Zwischen zwei Schichten		Sonde III Ende der letzten Schicht		Sonde IV Faradays dunkler Raum	
$\Pi = 740 \text{ V.}$		$\Pi = 750 \text{ V.}$		$\Pi = 810 \text{ V.}$		$\Pi = 820 \text{ V.}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
	Volt		Volt		Volt		Volt
2,3	1,2	3,5	2,0	4,5	1,8	3,0	1,9
3,7	2,3	4,8	2,6	7,8	2,9	8,5	3,5
5,8	3,1	7,2	5,1	10,2	3,5	11,6	5,1
10,1	4,5	9,8	6,3	15,6	5,4	15,3	6,5
15,2	7,5	14,4	9,1	17,3	6,0	21,6	9,3
21,1	9,0	18,3	10,1	20,5	6,8	25,9	10,9
25,3	11,0	22,2	12,6	23,3	7,6	32,3	12,5
30,9	14,8	26,8	14,8	30,0	8,1	35,0	13,9
34,6	14,2	31,5	15,2	38,0	8,9	49,3	16,6
42,1	15,0	46,3	17,2	46,4	11,4	56,1	17,3
56,4	17,2	57,1	18,0	52,1	12,3	64,8	19,3
60,0	18,7	63,5	19,3	64,0	14,0	74,0	19,9
82,5	20,1	67,0	21,0	75,3	15,2	80,3	20,2
93,9	20,6	80,5	22,1	84,2	15,5	113,0	24,9
-0,12	4	98,0	22,8	99,0	17,1	-0,04	3
-0,18	6	-0,14	3	146,0	22,0	-0,10	11
-0,25	10	-0,19	5	-0,13	8	-0,16	21
-0,34	14	-0,27	8	-0,19	16	-0,19	24
-0,41	20	-0,36	12	-0,27	23	-0,26	33
-0,56	31	-0,48	21	-0,38	32	-0,34	41
-0,61	37	-0,59	27	-0,45	41	-0,39	50
-0,69	46	-0,68	34	-0,56	54		
-0,72	51	-0,70	37				
		-0,82	44				
		-0,89	55				

Tabelle XV (Fortsetzung).

 $I = 0,81 \text{ M.-V. } p = 0,21 \text{ bis } 0,22 \text{ mm.}$

Sonde V Dunkler Trennungsraum		Sonde VI Beginn des Glimmlichtes		Sonde VII Glimmlicht (Anfang dunkler Raum)		Sonde VIII Dunkler Kathodenraum	
$II = 780 \text{ V.}$		$II = 750 \text{ V.}$		$II = 730 \text{ V.}$		$II = 680 \text{ V.}$	
$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E	$i \cdot 10^{-6}$	E
	Volt		Volt		Volt		Volt
3,97	2,1	9,2	0,7	1,07	2,0	0,21	11
7,3	2,8	24,3	1,2	1,27	2,6	0,38	23
12,4	4,2	35,8	1,7	3,6	4,3	0,46	29
18,6	5,3	63,8	2,0	10,5	6,3	0,61	40
28,2	6,9	84,1	2,4	17,7	7,1	0,73	46
33,4	7,6	108,4	2,7	31,3	8,0	0,82	58
50,2	8,6	151,3	3,9	54,8	9,5	0,97	67
55,1	8,9	234,0	4,5	77,0	10,2	1,20	87
64,1	11,3	280,9	6,1	101,5	10,9	1,31	97
90,4	14,6	302,1	7,2	140,0	11,8	1,39	102
115,1	17,9	342,0	8,6	180,0	12,9	1,59	126
146,6	19,4	470,0	13,8	257,0	14,0	1,83	146
183,1	21,1	- 5,1	4	407,0	15,3	- 0,13	11
251,0	24,2	- 6,2	11	- 2,8	2,7	- 0,19	17
338,0	24,2	- 6,9	19	- 6,1	5	- 0,25	21
- 0,08	6	- 7,6	22	- 8,4	7	- 0,31	26
- 0,18	13	- 9,8	30	- 10,6	8	- 0,53	40
- 0,18	18	- 10,0	32	- 18,0	17	- 0,62	51
- 0,26	29	- 13,1	48	- 46	48	- 0,85	64
- 0,34	41	- 16,3	71				
- 0,35	42						
- 0,57	61						

positiven Licht, Glimmlicht, Faradays dunklen Raum und dunklen Kathodenraum lassen sich aber nicht miteinander vergleichen, weil die Drucke und die Potentialdifferenzen zwischen den Enden der Röhre häufig verschieden waren. In Tab. XV teile ich noch eine Beobachtungsreihe mit, bei der die Längen und Dicken der Sonden stets gleich waren und ebenso Druck und Stromstärke des Hauptstromkreises. Alle Sonden wurden neu geputzt, auch wurde nach jeder Beob-

achtungsreihe das Rohr mit frischer Luft mehrere Male nacheinander gefüllt und ausgepumpt. Im Rohr waren fünf Schichten vorhanden. Die Lage der einzelnen Sonden ist besonders angegeben.

Den Verlauf der Kurven stellt Fig. 6 dar, in der + das positive Licht, D. R. Faradays dunkler Raum, Gl. Glimmlicht und K. D. R. dunkler Kathodenraum bedeuten.

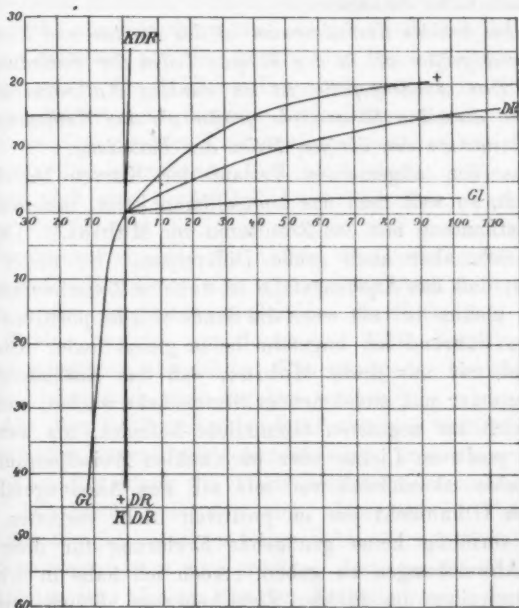


Fig. 6.

Aus denselben lassen sich folgende Regelmäßigkeiten entnehmen:

1. Im positiven Licht ist das Anodengefälle für kleine Stromstärken klein, wächst aber mit der Stromstärke und nähert sich einem Maximum dem normalen Anodengefälle.
2. Das Kathodengefälle im positiven Licht, welches für kleine Stromstärken ebenfalls sehr klein ist, nimmt mit der Stromstärke sehr rasch zu.

3. *Im dunklen Zwischenraum verläuft das Anoden- und Kathodengefälle so, als wenn die Anode sich im positiven Licht befindet.*

4. *Im Glimmlicht wachsen Kathoden- und Anodengefälle viel langsamer mit wachsender Stromstärke als im positiven Licht oder im dunklen Zwischenraum. Ob das Anodengefälle sich demselben Grenzwert nähert wie im positiven, läßt sich aus den Versuchen nicht entnehmen.*

5. *Im dunklen Kathodenraum ist das Anoden- und Kathodengefälle viel größer als in den übrigen Teilen der Entladung.*

6. *Das Anodengefälle ist im dunklen Kathodenraum bei einer und derselben Stromstärke größer als das Kathodengefälle im Gegensatz zu den übrigen Teilen der Entladung.*

Was den allgemeinen Verlauf der Kurven betrifft, so zeigt sich, so weit man das kontrollieren kann, meistens eine Übereinstimmung mit den Resultaten von Mebius.¹⁾ Dagegen zeigen sich aber auch große Differenzen. So findet z. B. Mebius, daß das Anodengefälle im dunklen Zwischenraum bedeutend kleiner ist, als wenn die Sonde sich im positiven Licht befindet, während ich ungefähr beide gleich finde. Übereinstimmend mit mir findet Mebius, daß das Kathodengefälle viel langsamer mit zunehmender Stromstärke wächst, wenn die Sonde sich im negativen Glimmlicht befindet, als wenn sie sich im positiven Lichte oder im dunklen Zwischenraum befindet, aber abweichend von mir soll das Anodengefälle im negativen Glimmlicht wie im positiven Licht verlaufen. Ich vermag vorläufig keine genügende Erklärung für diese und andere Abweichungen zu geben. Auch ich habe in drei Beobachtungsreihen im dunklen Zwischenraum ähnliche niedrige Werte für das Anodenpotential erhalten wie Mebius, dann befand sich aber die Sonde schon dem Glimmlicht sehr nahe, so daß die Vermutung naheliegt, daß sie von Glimmlichtstrahlen getroffen wurde. Anfangs glaubte ich, daß Mebius die beiden Beobachtungsreihen miteinander verwechselt hat, aber dagegen spricht sein § 11, in dem er direkt beweist, daß im dunklen Zwischenraume solche niedrige Anodenpotentiale vorhanden sind. Wahrscheinlich spielen hier noch unver-

• 1) Satz 1, 2, 5 und 6 sind bereits von Mebius gefunden worden.

standene Nebeneinflüsse eine Rolle; als solche kämen in Betracht der Druck, Geschwindigkeit der Ionen etc., deren Einfluß ich in einer späteren Arbeit aufzuklären gedenke.

§ 17. *Polarisation und Transversalstrom.* Wie schon in der Einleitung erwähnt, fand Hittorf zuerst, daß der Durchgang einer kontinuierlichen Entladung den Zustand des in der Entladungsröhre enthaltenen Gases derart verändert, daß auch in transversaler Richtung Entladungen leicht hindurchgehen. Von einer Reihe von Forschern sind aus der Größe des Transversalstromes Schlüsse auf die Anzahl der Ionen gezogen worden. Danach müßte die Zahl der Ionen am größten im Glimmlicht und am kleinsten im dunklen Kathodenraum sein, sie müßte kleiner in dem dunklen Zwischenraum zwischen zwei Schichten sein, als im leuchtenden Teil etc. Gegen diese Schlüsse erheben sich eine große Reihe von Bedenken. Denn da die Träger des Stromes die Ionen sind, so muß an den Stellen, wo der Gradient klein ist, die Anzahl der Ionen groß sein und umgekehrt. Berechnet man hieraus die relative Anzahl der Ionen in den verschiedenen Gebilden der Entladung, so erhält man Zahlen, welche von denen mit Hilfe der Transversalströme erhaltenen abweichen. Eine genügende Erklärung hierfür ist bisher noch nicht gegeben worden.¹⁾

Aus dem Vorhergehenden kann man sich wenigstens schon einigermaßen Regenschaft geben, weswegen an den verschiedenen Teilen der Entladung die Transversalströme verschieden groß sind. Die Sonde polarisiert sich. Dort wo die Polarisation am kleinsten ist, also im Glimmlicht, dort ist infolgedessen der Transversalstrom am größten; dort wo die Polarisation am größten ist, also im dunklen Kathodenraum, dort ist der Transversalstrom am kleinsten. Nun sprechen die obigen Beobachtungen zugunsten meiner Auffassung, daß diese Polarisation von der Verarmung an Ionen herrühre. Ist die Sonde z. B. negativ geladen, so wird sie die positiven Ionen anziehen; dieselben werden ihre Elektrizität abgeben und hierdurch kommt der Strom zustande. Es tritt eine Verarmung an positiven Ionen ein und zu gleicher Zeit bildet sich gleichsam ein schützender Mantel von den abgestoßenen negativen Ionen

1) Vgl. J. J. Thomson, The discharge of electricity through gases.

um die Sonde. Offenbar wird bei ein und derselben Stromstärke die Verarmung um so kleiner sein, je größer die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ionen ist. Man müßte somit aus der Polarisierung bez. Verarmung auf die Zahl der Ionen schließen können. Es wäre dies richtig, wenn die Polarisierung nur eine Funktion der Zahl der Ionen wäre, aber sie hängt außerdem noch von der Geschwindigkeit der Ionen ab, die wegen des wechselnden Gradienten in den verschiedenen Teilen der Entladung verschieden ist. Wie die Polarisierung von der Geschwindigkeit abhängt, das läßt sich theoretisch nur schwer übersehen. Hier müssen neue Versuche gemacht werden, über die ich in einer folgenden Abhandlung zu berichten hoffe. Jedenfalls läßt sich, bevor der Einfluß der Geschwindigkeit auf die Polarisierung ermittelt worden ist, kaum ein sicherer Schluß über die relative Anzahl der Ionen in den verschiedenen Entladungsgebilden fällen.

Über die Natur des Anoden- und Kathodenpotentials sind eine Reihe von Hypothesen aufgestellt worden. Die Diskussion derselben möchte ich ebenfalls auf meine spätere Abhandlung verschieben.

Resultate.

1. Wenn man in einer stromdurchflossenen Entladungsröhre eine Sonde anbringt, und durch diese einen Teil des Hauptstromes hindurchgehen läßt, so polarisiert sich dieselbe. Diese Polarisierung rührt wahrscheinlich nicht von einer chemischen Veränderung der Elektrode her, wie bei der galvanischen Polarisierung, sondern von der Verarmung an Ionen.

2. Ändert man die Länge der Sonde, so gilt das Gesetz: Bei gleicher Stromdichte des durch die Sonde fließenden Stromes ist die elektromotorische Kraft der Polarisierung die gleiche.

3. Ändert man die Stromstärke im Hauptstromkreis, so ist bei der gleichen elektromotorischen Kraft der Polarisierung die Stromstärke im Nebenstromkreis sehr angenähert proportional der Stromstärke im Hauptstromkreis.

4. Im positiven Licht ist das Anodengefälle für kleine Stromstärken klein, wächst aber mit der Stromstärke und nähert sich einem Maximum, dem normalen Anodengefälle.

5. Das Kathodengefälle im positiven Licht, welches für kleine Stromstärken ebenfalls sehr klein ist, nimmt mit der Stromstärke sehr rasch zu.

6. Im dunklen Zwischenraum verläuft das Anoden- und Kathodengefälle so, als wenn die Sonde sich im positiven Licht befindet.

7. Im Glimmlicht wachsen Kathoden- und Anodengefälle viel langsamer mit wachsender Stromstärke als im positiven Licht oder im dunklen Zwischenraum.

8. Im dunklen Kathodenraum ist das Anoden- und Kathodengefälle viel größer als in den übrigen Teilen der Entladung.

9. Das Anodengefälle ist im dunklen Kathodenraum bei einer und derselben Stromstärke größer als das Kathodengefälle im Gegensatz zu den übrigen Teilen der Entladung.

Königsberg i. Pr., Physikal. Kabinett der Universität,
17. Oktober 1905.

(Eingegangen 19. Oktober 1905.)

**2. F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber;
von Gerhard Glage.**

(Auszug aus der Königsberger Dissertation.)

Die im Jahre 1862 erfolgte Publikation Neumanns über seine Methode, welche schon einige Zeit im Besitze ihres Urhebers gewesen sein dürfte¹⁾, scheint durch eine 1861 von Ångström veröffentlichte Methode²⁾ veranlaßt zu sein, die in gleicher Weise an mit der Zeit veränderliche Temperaturzustände knüpft. Während aber Ångström seiner Methode periodisch verlaufende Temperaturzustände zugrunde legt, geht Neumann 1862 von einfach ablaufenden Temperaturzuständen aus. Neumann scheint erst später in seinen Vorlesungen und Seminaren auf die Ångströmsche Methode eingegangen zu sein, hierbei dieselbe dann umgestaltet und in die Form gebracht zu haben, in der sie später durch H. Weber³⁾ (Braunschweig) eingehend untersucht ist.

1) F. E. Neumann, Ann. de chim. et de phys. (III) 66. p. 183. 1862 (und Phil. Mag. (4) 25. p. 63. 1863). p. 184 spricht Neumann davon, daß er die ersten Beobachtungen in dieser Richtung vor 3 Jahren, also 1859 gemacht habe.

2) K. Ångström, Öfvers. af Förrhandl. 1861. p. 3; Pogg. Ann. 114. p. 513. 1861; 118. p. 423. 1863; 123. p. 623. 1864. Den an die Publikation von Ångström anknüpfenden Erörterungen von Dumas (Fortschr. d. Phys. 17. p. 403. 1861; 18. p. 362. 1862; 20. p. 396. 1864 und Pogg. Ann. 129. p. 272 u. 393. 1866) und Wangerin (Fortschr. d. Phys. 22. p. 319. 1866) hat nach Mitteilungen des letzteren Neumann ferngestanden. Diese sind lediglich durch die Redaktion der Fortschritte angeregt worden.

3) H. Weber (Braunschweig), Pogg. Ann. 146. p. 257. 1872, sagt, daß seine Methode „F. Neumann in seinen Vorlesungen gegeben hat“ (vgl. p. 258).

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich lediglich um die ursprüngliche Neumannsche Methode, wie sie durch H. F. Weber (Zürich), Kirchhoff und Helmholtz eine Darstellung gefunden hat.¹⁾ Weber und Kirchhoff scheinen jedoch ein besonders charakteristisches Moment übersehen zu haben: *Die Unabhängigkeit der Methode von einem thermisch genau definierten Anfangszustande*. In einer solchen Unabhängigkeit liegt aber praktisch ein außerordentlich großer Vorteil, denn es dürfte experimentell sehr schwierig sein, gerade für gut leitende Körper einen für Meßzwecke thermisch genau definierten Anfangszustand herzustellen, der sich zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit eignet.²⁾

Neumanns Abhandlung vom Jahre 1862 ist zu kurz, als daß sie über den hier hervorgehobenen Punkt Auskunft erteilt. Auch von Schülern Neumanns ist in den im Archiv des math.-phys. Laboratoriums zu Königsberg aufbewahrten Seminararbeiten vom Jahre 1866 stets auf den Anfangszustand zurückgegangen. Betrachtet man aber die noch vorhandenen Vorrichtungen, an denen Neumann seine Messungen angestellt hat, so scheint jeder Zweifel ausgeschlossen, daß sich Neumann nicht von der Kenntnis des schwer zu definierenden Anfangszustandes befreit haben sollte.

Hr. Prof. P. Volkmann hat auf diesen Umstand in seinen Vorlesungen besonders hingewiesen. Eine eventuelle Kenntnis des Anfangszustandes wird nur für gewisse physikalische Nebenfragen von Bedeutung sein — besonders für die Frage, ob die Zeit hinreichend vorgeschritten ist, um sich auf das erste Glied der in Betracht kommenden, stark konvergenten Reihen beschränken zu können. Lediglich an dieses erste Glied knüpft

1) H. F. Weber (Zürich), Berl. Monatsberichte 1880. p. 457 und Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich 25. p. 26. 1880; G. Kirchhoff, Vorles. 4. p. 35. 1894; H. v. Helmholtz, Vorles. 6. p. 75. 1903. Hågeström hat in seiner Dissertation (Upsala 1891) „Über Ångströms und Neumanns Methode“ die Neumannsche Methode der ersten Form nur zu Vorstudien verwendet, ohne ihr gerecht zu werden; die Methode der zweiten Form behandelt er gar nicht.

2) In der zitierten Abhandlung von H. Weber (Braunschweig) erscheint die spätere, hier nicht zur Darstellung kommende Neumannsche Methode der zweiten Form gleichfalls vom Anfangszustande unabhängig.

Neumanns Methode. In dem Verhältnis dieses ersten Gliedes zu zwei verschiedenen, hinlänglich vorgeschrittenen Zeiten fällt aber der vom Anfangszustande abhängige und aus diesem nach dem Lagrangeschen Verfahren bestimmbare Koeffizient heraus.

I. Theoretische Darstellung der Methode.

Wie die von Hrn. Hecht¹⁾ behandelte Methode für schlecht leitende Körper, so knüpft auch die für gut leitende Körper an die Messung mit der Zeit veränderlicher Temperaturzustände. Während jene Methode die Kugel- und Würfelform bevorzugt, wählt diese die Stab- und Ringform zum Ausgangspunkte. Der Grundgedanke der Methode ist folgender: Ein Stab (bez. Ring) wird an einem Ende (bez. Querschnitte) bis zu einem beliebigen — jedoch nach verschiedenen Richtungen hin zweckmäßig zu wählenden — Anfangszustande erwärmt. Sodann läßt man ihn erkalten — frei ausstrahlen — und bestimmt nach Verlauf von wenigen Minuten in bestimmten Zeitintervallen die Änderung von Summe und Differenz der Temperaturen zweier in der Nähe der Stabenden befindlichen (bez. diametral gegenüberliegender) Querschnitte. Wie man bereits ohne jede Rechnung erkennt, liefern die so beobachteten Differenzen die innere, die Summen hingegen die äußere Leitfähigkeit.

Es bedeutet im folgenden: $b = h/k$ das Verhältnis der äußeren zur inneren Wärmeleitfähigkeit, ρ die Dichte, c die spezifische Wärme, $a^2 = k/(\rho \cdot c)$ die Temperaturleitfähigkeit, p den Umfang und q den Flächeninhalt eines Querschnittes, f^2 eine Abkürzung für $a^2 \cdot b \cdot p/q$, l die Länge des Stabes bez. Ringes, wobei unter „Ring“ stets ein beliebig gekrümmter, in sich zurücklaufender Stab verstanden werden soll. Stellt ferner t die Zeit dar, gerechnet vom Augenblick des Unterbrechens der Erwärmung, und liegt der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkte derjenigen Fläche des Stabes bez. desjenigen Querschnittes des Ringes, durch dessen Erhitzen die Erwärmung eingeleitet ist, so bezeichne z den Abstand eines variablen Querschnittes des Stabes von der Endfläche

1) H. Hecht, Diss. Königsberg 1903; Ann. d. Phys. 14. p. 1008. 1904.

$z = 0$, bez. die Bogenlänge derjenigen Linie, welche die Mittelpunkte der einzelnen Ringquerschnitte enthält, gerechnet von einem variablen Querschnitte bis zu dem durch $z = 0$ bestimmten. Hinsichtlich der Numerierung der Formeln sei noch bemerkt, daß sich der Index a stets auf den Stab, der Index b auf den Ring bezieht.

A. Schematische Theorie.

Betrachten wir zunächst die einzelnen Querschnitte des Stabes bez. Ringes als isotherme Flächen, so gilt für die lineare Bewegung der Wärme in Richtung der z die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - f^2 \cdot \vartheta.$$

Der freien Ausstrahlung an der Mantelfläche ist in dieser Differentialgleichung bereits durch den Term $f^2 \cdot \vartheta$ Rechnung getragen. Außerdem wird noch beim Stabe durch die beiden Endquerschnitte Wärme an die Umgebung abgegeben, während beim Ringe die Temperatur in bezug auf z um die Länge l periodisch ist, und Punkte, die von der Erwärmungsstelle in Richtung der positiven und negativen z den gleichen Abstand haben, sich auch auf der gleichen Temperatur befinden. Es kommen somit zu (1) noch die beiden Bedingungsbedingungen hinzu:

$$(2a) \quad \text{für } z = 0: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = + b \cdot \vartheta,$$

$$(3a) \quad \text{für } z = l: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = - b \cdot \vartheta,$$

worin ϑ von der Umgebungstemperatur aus zu rechnen ist:

$$(2b) \quad \vartheta_{z=+z} = \vartheta_{z=-z},$$

$$(3b) \quad \vartheta_{z=s} = \vartheta_{z=s+l}.$$

Durch diese drei Gleichungen kann bereits die Temperatur an irgend einer Stelle des Stabes bez. Ringes als Funktion des Ortes und der Zeit bestimmt werden. Diese Rechnungen finden sich z. B. in Kirchhoffs Vorlesungen 4. p. 35–40. Man erhält:

$$(4a) \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot \left\{ \cos(\gamma_n \cdot z) + \frac{b}{\gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n \cdot z) \right\},$$

$$(4b) \quad \vartheta = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot \cos(\gamma_n \cdot z),$$

wenn

$$(5) \quad \beta_n = a^2 \cdot \gamma_n^2 + f^2$$

und die A_n Konstante bedeuten, die sich aus dem Anfangszustande nach dem Lagrangeschen Verfahren ableiten lassen (vgl. Abschnitt III). Die γ_n finden ihre Bestimmung durch die Gleichungen (3). Beim Stabe gehorchen sie der transzendenten Gleichung:

$$(6a) \quad \operatorname{tg}(\gamma_n \cdot l) = \frac{2 \cdot \gamma_n \cdot b}{\gamma_n^2 - b^2},$$

worin $\gamma_n = 0$ auszuschließen ist und $\gamma_n \cdot l$ mit wachsendem n gegen $(n-1) \cdot \pi$ konvergiert.

Beim Ringe folgt aus $\cos(\gamma_n \cdot z) = \cos(\gamma_n \cdot (z+l))$:

$$(6b) \quad \gamma_n = n \cdot \frac{2\pi}{l},$$

worin n eine ganze positive Zahl oder Null, also $\gamma_n = 0$ zuzulassen ist. Daß beim Ringe in (4b) die mit einem Sinus behafteten Terme fortfallen, folgt unmittelbar aus (2b), während (2a) beim Stabe den Koeffizienten dieser Terme zu b/γ_n bestimmt.

Für den Stab ist: $\cos(\gamma_n \cdot z) + (\beta/\gamma_n) \cdot \sin(\gamma_n \cdot z) = (-1)^{n+1}$ für $z=l$ und $=+1$ für $z=0$. Somit wird:

$$(7a) \quad \vartheta_{z=0} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t},$$

$$(8a) \quad \vartheta_{z=l} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot (-1)^{n+1},$$

$$(7b) \quad \vartheta_{z=0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t},$$

$$(8b) \quad \vartheta_{z=l/2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot (-1)^n.$$

Durch Addition bez. Subtraktion von (7) und (8) erhält man noch stärker konvergente Reihen, da diese nur die Hälfte der Glieder der vorigen enthalten. Wie im Abschnitt IV gezeigt werden wird, ist eine Beschränkung auf das erste Glied dieser

Reihen sogar schon für kleine Werte der Zeit t gestattet, und es folgt somit:

$$(9a) \quad \frac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1}\} = A_1 \cdot e^{-\beta_1 t},$$

$$(10a) \quad \frac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1}\} = A_2 \cdot e^{-\beta_2 t},$$

$$(9b) \quad \frac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1/2}\} = A_0 \cdot e^{-\beta_0 t},$$

$$(10b) \quad \frac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1/2}\} = A_1 \cdot e^{-\beta_1 t}.$$

Beobachtet man eine Reihe von Summen und Differenzen zu verschiedenen Zeiten, so heben sich durch Division der beiden zu zwei verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 an demselben Punkte gefundenen Summen bez. Differenzen die A_n heraus; und man erhält unabhängig von A_n , also auch *unabhängig vom Anfangszustande*:

$$(11a) \quad \beta_1 = \frac{\ln \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1}\}_{t_1} - \ln \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(12a) \quad \beta_2 = \frac{\ln \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1}\}_{t_1} - \ln \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(11b) \quad \beta_0 = \frac{\ln \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1/2}\}_{t_1} - \ln \{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=1/2}\}_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(12b) \quad \beta_1 = \frac{\ln \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1/2}\}_{t_1} - \ln \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=1/2}\}_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Da nun a) $\beta_2 - \beta_1 = a^2 \cdot (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ bez. b) $\beta_1 - \beta_0 = a^2 \cdot (\gamma_1^2 - 0)$, so erhält man aus den beobachteten Änderungen der Summen und Differenzen das gesuchte a^2 , sobald die γ bekannt sind. Während sich diese beim Ringe ohne weiteres aus der Länge l ergeben, sind sie beim Stabe aus der transzendenten Gleichung (6a) bestimmbar, wenn man mit Näherungswerten für b in die Rechnung hineingeht.

Aus (6a) folgt durch Einführen des halben Winkels:

$$\operatorname{tg} \left(\gamma_n \cdot \frac{l}{2} \right) = + \frac{b}{\gamma_n} \text{ für ungerade Quadranten,}$$

$$\operatorname{tg} \left(\gamma_n \cdot \frac{l}{2} \right) = - \frac{\gamma_n}{b} \text{ für gerade Quadranten.}$$

Geht man also mit einem Näherungswerte für b in die Rechnung hinein, so bestimmt sich γ_1 durch $\operatorname{tg}(\gamma_1 \cdot l/2) = b/\gamma_1$ und γ_2 durch $\operatorname{tg}(\gamma_2 \cdot l/2) = -\gamma_2/b$. Diesen Weg zur Berechnung der γ_n muß man einschlagen, wenn nur $\vartheta_{z=0}$ und $\vartheta_{z=1}$ beobachtet werden. In dieser Weise hat aller Wahrschein-

lichkeit nach Neumann die γ bestimmt, wenigstens nach den in seinem Nachlaß vorhandenen Stäben zu schließen. In den meisten derselben befanden sich nur an zwei Stellen Thermoelemente. Nun hat jedoch Kirchhoff¹⁾ gezeigt, daß sich die Rechnung wesentlich vereinfachen läßt, wenn man außer $\vartheta_{z=0}$ und $\vartheta_{z=l}$ auch noch die Temperatur in der Mitte des Stabes $\vartheta_{z=l/2}$ beobachtet. Kirchhoff leitet ab, daß

$$\frac{\vartheta_{z=0} + \vartheta_{z=l}}{2 \cdot \vartheta_{z=l/2}} = \cos(\gamma_1 \cdot l/2)$$

ist für solche Werte l , für die die Gleichungen (9) und (10) gelten. Nachdem man durch diesen Quotienten γ_1 bestimmt hat, folgt b aus $\operatorname{tg}(\gamma_1 \cdot l/2) = b/\gamma_1$ und schließlich γ_2 aus $\operatorname{tg}(\gamma_2 \cdot l/2) = -\gamma_2/b$.

B) Abweichungen von der schematischen Theorie.

1. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge des endlichen Querschnittes.

Es kann fraglich erscheinen, ob bei dicken Stäben und Ringen die einzelnen Querschnitte noch als isotherme Flächen angesehen werden dürfen.

H. F. Weber²⁾ bejaht dieses und erwähnt, „daß die früher allgemein verbreitete Auffassung: Die Querschnitte müßten außerordentlich klein sein, kleine Bruchteile eines Quadratcentimeters betragen, damit die Wärmebewegung als eine lineare betrachtet werden dürfte, auf einem Irrtum beruhe.“ Als Beispiel führt Weber an, „daß ein einseitig erwärmter Kupferstab einen quadratischen Querschnitt von 10 cm Höhe haben darf, ohne daß die größte in einem Querschnitte vorkommende Temperaturdifferenz den 1000. Teil der mittleren Temperatur des Querschnittes übersteigt.“

Eine rechnerische Behandlung des Wärmeleitproblems für Stäbe mit endlichem Querschnitte ist für den *rechteckigen* Querschnitt durch Kirchhoff³⁾ gegeben. Was den *kreisförmigen* Querschnitt betrifft, so ist von Fourier⁴⁾ die radiale

1) G. Kirchhoff, Vorles. 4. p. 37. 1894.

2) H. F. Weber, Berl. Monatsber. 1880. p. 461.

3) G. Kirchhoff, l. c. p. 41.

4) Fourier, Theorie der Wärme (deutsche Ausgabe von Weistein) p. 253. 1884.

Wärmebewegung in einem unendlich langen Zylinder wohl durchgeführt worden; jedoch sind die gegebenen Resultate derart kompliziert, daß dieselben kaum eine Anschauung über die in Betracht kommenden Größenordnungen geben können.

Da ich außer dieser Arbeit von Fourier in der Literatur nichts über den kreisförmigen Querschnitt habe finden können, so habe ich in meiner Dissertation (vgl. p. 16—23), ausgehend von der für ein allseitig unendlich ausgedehntes Medium gültigen Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right\},$$

die Rechnung für Stab und Ring völlig parallel durchgeführt. Ich erhielt:

$$(14a) \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ A_n \cdot e^{-\beta_n t} \left[\cos(\gamma_n \cdot z) + \frac{b}{\gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n \cdot z) \right] \cdot P_n \right\},$$

$$(14b) \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ A_n \cdot e^{-\beta_n t} \cdot \cos(\gamma_n \cdot z) \cdot P_n \right\},$$

worin

$$(15) \quad P = J^0(\gamma' \cdot r),$$

d. h. die Besselsche Zylinderfunktion 0^{ter} Ordnung und 1^{ter} Art von dem Argumente $\gamma' \cdot r$ ist. γ' ist eine aus der Grenzbedingung an der Mantelfläche zu bestimmende Konstante.

Als Bestimmungsgleichung für γ' ergibt sich:

$$(16) \quad \frac{\partial J^0(\gamma' \cdot r)}{\partial r} = b \cdot J^0(\gamma' \cdot r),$$

so daß

$$(17) \quad \gamma'^2 = \frac{2^2 \cdot I}{R^2},$$

worin I Wurzel folgender Gleichung ist:

$$(18) \quad \frac{b \cdot R}{2} = \frac{I}{1 - \frac{I}{2 - \frac{I}{3 - \frac{I}{4 \dots}}}}.$$

und R den Radius des Querschnittes angibt.

Je weiter die Zeit der Abkühlung vorgeschritten ist, desto angenäherter wird ϑ durch die Glieder dargestellt, für die γ' den kleinsten Wert hat. Jedenfalls werden diese Glieder die

charakteristische Abweichung von der schematischen Theorie geben.

Da bei der Kleinheit von b im allgemeinen $b \cdot R/4$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann (für Eisenstab I ist z. B.: $b = 0,0020$, $R = 0,68$, also: $b \cdot R/4 = 0,00034$), so dürfen wir setzen:

$$(19) \quad \Gamma_{\min.} = \frac{b \cdot R}{2}.$$

Eine mathematisch strenge Bestimmung von Γ würde physikalisch gar keinen Wert haben, weil sie keine größere Genauigkeit liefern könnte.

Der kleinste Wert von γ wird:

$$(20) \quad \gamma'_{\min.} = \frac{2 \cdot b}{R}.$$

Die wesentliche Abweichung von der schematischen Theorie ist somit gegeben durch:

$$P = 1 - \frac{\gamma'^2_{\min.} \cdot r^2}{2^2}$$

oder

$$(21) \quad P = 1 - \frac{b}{R} \cdot \frac{r^2}{2}.$$

Um eine gute Anschauung von den hier in Betracht kommenden Größenverhältnissen zu erhalten, bilden wir ϑ für die Achse und die Peripherie ($r = R$). Es folgt unmittelbar:

$$(22) \quad \vartheta_{\text{Peripherie}} = \vartheta_{\text{Achse}} \cdot \left\{ 1 - \frac{b \cdot R}{2} \right\},$$

$$(23) \quad \frac{\vartheta_{\text{Achse}} - \vartheta_{\text{Peripherie}}}{\vartheta_{\text{Achse}}} = \frac{b \cdot R}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{für Eisenstab I} = 0,00068, \text{ für} \\ \text{besser leitende Materialien kleiner} \end{array} \right\}.$$

Da b klein ist, können im allgemeinen die einzelnen Querschnitte als isotherme Flächen betrachtet werden. Jedenfalls kann R stets so gewählt werden, daß der obige Quotient unter eine vorgeschriebene Grenze heruntergedrückt wird. Werden ferner noch die einzelnen Temperaturen in nahezu dem gleichen Abstände von der Achse gemessen, d. h. werden die einzelnen Thermoelemente gleich tief in den Stab eingeführt, so muß der obige geringe Fehler selbst bei dickeren Stäben so gut wie verschwinden, weil die Oberflächen der einzelnen coaxialen Zylinder als isotherm anzusehen sind, somit für Punkte dieser

zylindrischen Flächen nur die lineare Wärmebewegung in Richtung der z -Achse in Rechnung zu ziehen ist.

2. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Abhängigkeit der inneren und äußeren Wärmeleitfähigkeit und der spezifischen Wärme von der Temperatur.¹⁾

Die Definition der Wärmeleitkonstanten fußt auf der Proportionalität zwischen Temperaturgefälle und Wärmeströmung. Die Fouriersche Annahme ist jedoch nicht vollständig richtig; vielmehr ist die Wärmeleitkonstante — wenn auch nur in sehr geringem Grade — von der Höhe der Temperatur abhängig.

Man pflegt allgemein k , h und c als *lineare Funktionen* der Temperatur einzuführen. Insbesondere hat dies auch H. F. Weber in der zitierten Abhandlung²⁾ getan, indem er auf Grund dieser Voraussetzung die allgemeine Theorie der Wärmeleitung für den Ring entwickelte. Ich habe in meiner Dissertation (vgl. p. 24—30) Stab und Ring parallel behandelt, mich ferner in der Rechnung auf die wesentlichen Glieder beschränkt und so nur die charakteristische Abweichung von der schematischen Theorie bestimmt.

Setzt man:

$$(24) \quad \begin{cases} k = k_0 + k_1 \cdot \vartheta, \\ h = h_0 + h_1 \cdot \vartheta, \\ c = c_0 + c_1 \cdot \vartheta, \end{cases}$$

so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(25) \quad \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \left\{ 1 + \frac{c_1}{c_0} \cdot \vartheta \right\} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \left\{ \frac{k_0}{\mu \cdot c_0} + \frac{k_1}{\mu \cdot c_0} \cdot \vartheta \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{h_0}{\mu \cdot c_0} \cdot \frac{p}{q} + \frac{h_1}{\mu \cdot c_0} \cdot \frac{p}{q} \cdot \vartheta \right\} \cdot \vartheta \right\} = 0.$$

Ausgehend von dieser allgemeinen Differentialgleichung, habe ich gezeigt, daß, falls nur aufeinanderfolgende Beobachtungen kombiniert werden, die Endresultate und charakteristischen Züge der schematischen Theorie ungeändert bleiben. Es ist hierdurch nicht die geringste Beschränkung auferlegt, weil man zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen schon deshalb

1) Der Temperaturkoeffizient der Dichte ist so klein, daß dieser ohne jedes Bedenken vernachlässigt werden kann.

2) H. F. Weber, l. c. p. 460.

kombinieren wird, um die Wärmeleitfähigkeit für eine bestimmte Temperatur zu erhalten.

3a. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Befestigung der Thermoelemente in einiger Entfernung von den Stabenden.

Um unkontrollierbaren Störungen, wie diese in den Endflächen des Stabes leicht vorhanden sein könnten, zu entgehen, wurden zu den definitiven Messungen die Thermoelemente in einiger Entfernung von den Enden befestigt, wodurch naturgemäß eine nicht zu vernachlässigende Abweichung von der schematischen Theorie gegeben ist. Da es die Rechnung wesentlich vereinfacht, wenn beide Thermoelemente in gleicher Entfernung von den Endflächen eingeführt sind, und dieser Voraussetzung experimentell nichts im Wege steht, so ist dies stets geschehen, d. h. es ist $z_1 + z_2 = l$.

Aus der allgemeinen Lösung unseres Wärmeleitproblems (4a) folgt (vgl. Dissertation p. 31):

$$(26a) \quad \frac{1}{2}(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}) = A_1 \cdot e^{-\beta_1 t} \cdot \frac{\cos \frac{\gamma_1 (x_2 - x_1)}{2}}{\cos \frac{\gamma_1 l}{2}},$$

bez.

$$(27a) \quad \frac{1}{2}(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}) = A_2 \cdot e^{-\beta_2 t} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma_2 (x_2 - x_1)}{2}}{\sin \frac{\gamma_2 l}{2}}.$$

Es wird daher völlig analog der schematischen Theorie:

$$(28a) \quad \beta_1 = \frac{\ln(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

bez.

$$(29a) \quad \beta_2 = \frac{\ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Was schließlich noch die Bestimmung der γ betrifft, so folgt

$$(30a) \quad \cos \frac{\gamma_1 (x_2 - x_1)}{2} = \frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \cdot \vartheta_{z=l/2}}.$$

Es tritt demnach in dieser Formel zur Bestimmung von γ_1 an Stelle der Länge des Stabes nur der Abstand $z_2 - z_1$, wie das von vornherein zu vermuten war. b erhält man dann

wiederum aus $\operatorname{tg} \gamma_1 \cdot l/2 = b/\gamma_1$, und γ_2 bestimmt sich durch die transzendente Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 \cdot l/2 = -\gamma_2/b.$$

3b. Abweichungen von der schematischen Theorie infolge der Befestigung der Thermoelemente in um $1. l/8$ bez. $5. l/8$ von der Erwärmungsstelle abstehenden Ringquerschnitten.

Wie wir beim Stabe die Thermoelemente nicht in die Endflächen, sondern in einiger Entfernung von diesen einführen, so ist es auch hier beim Ringe — *freilich aus anderen Gründen* — zweckmäßig, die Temperaturen an den um $1. l/8$ bez. $5. l/8$ von der Erwärmungsstelle entfernten Querschnitten zu messen, worauf H. F. Weber¹⁾ aufmerksam macht.

Aus der allgemeinen Lösung unseres Wärmeleitproblems (4b) folgt (vgl. Dissertation p. 33) bereits für solche Werte der Zeit, für die erst das vierte Glied der Reihen zu vernachlässigen ist:

$$(26b) \quad \frac{1}{2} \{ \vartheta_{z=1. l/8} + \vartheta_{z=5. l/8} \} = A_0 \cdot e^{-\beta_0 t},$$

bez.

$$(27b) \quad \frac{1}{2} \{ \vartheta_{z=1. l/8} - \vartheta_{z=5. l/8} \} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\beta_1 t}.$$

Gleichung (26b) zeigt, was auch ohne Rechnung klar ist, daß die Summe für jeden ganz beliebigen Durchmesser die gleiche ist. Sie gibt naturgemäß in jedem Zeitpunkte die mittlere Temperatur des Ringes.

Es wird daher völlig analog der schematischen Theorie:

$$(28b) \quad \beta_0 = \frac{\ln(\vartheta_{z=1. l/8} + \vartheta_{z=5. l/8})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=1. l/8} + \vartheta_{z=5. l/8})_{t_2}}{t_2 - t_1},$$

$$(29b) \quad \beta_1 = \frac{\ln(\vartheta_{z=1. l/8} - \vartheta_{z=5. l/8})_{t_1} - \ln(\vartheta_{z=1. l/8} - \vartheta_{z=5. l/8})_{t_2}}{t_2 - t_1}.$$

Die γ bestimmen sich genau wie früher zu

$$(30b) \quad \gamma_0 = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_1 = 2 \cdot \pi / l.$$

Die Gleichungen zur Berechnung von a^2 bleiben somit ungeändert. Der Vorteil gegen früher besteht in der stärkeren Konvergenz der Reihen.

Man könnte hier vielleicht die Frage aufwerfen: Wenn

1) H. F. Weber, l. c. p. 465.

beim Stabe aus den angeführten Gründen die Thermoelemente in einiger Entfernung von den Enden befestigt werden, kann dann nicht diese Entfernung derart gewählt werden, daß auch dort das dritte Glied der Reihe Null wird und so die Formeln bereits ihre Gültigkeit erlangen, sobald die Zeit nur soweit vorgeschritten ist, daß das vierte Glied vernachlässigt werden darf? — Dies ist nicht möglich, weil bei den Gleichungen des Stabes nicht nur der Kosinus, sondern Kosinus und Sinus gleichzeitig auftreten und für keinen Wert des Argumentes Kosinus und Sinus gleichzeitig Null werden.

II. Ausarbeitung der definitiven Beobachtungsmethode und das Ergebnis verschiedener Vorversuche.

Ich begann meine Messungen in der von Neumann angegebenen Weise: „Die beiden Thermoelemente waren in Nähe der Enden jedes Stabes befestigt. Ihre Drähte führten zu einem Differentialgalvanometer, dem ich eine ganz spezielle Aufstellung gab, die es gestattete, sowohl Summe wie Differenz der beiden durch die Drähte fließenden Ströme zu messen. Das eine Ende des so hergerichteten Stabes wurde durch die Flamme eines Bunsenbrenners bis zum Eintreten eines stationären Temperaturzustandes erhitzt. Sodann wurde die Flamme entfernt und nach Verlauf einer gewissen Zeit damit begonnen, Summe und Differenz der beiden Stromstärken zu messen“ (vgl. p. 184).

In enger Anlehnung an diese Beobachtungsanordnung schloß ich jedes der beiden Thermoelemente durch eine Spule des Differentialgalvanometers und ließ beide Stromkreise einmal in demselben — Summe —, sodann im entgegengesetzten Sinne — Differenz — auf die Nadel einwirken. Da jedoch während der einzelnen Beobachtungen die Temperaturen sehr schnell von höheren zu niederen Werten abnahmen, so machten sich die Nachteile der Ausschlagsmethode bei diesen Messungen im vollsten Maße geltend, und es gelang mir nicht, befriedigende Resultate zu erhalten. Ich sah mich daher genötigt, zu einer Nullmethode überzugehen und habe längere Zeit durch Kompensation die Temperaturen einzeln gemessen. Zu einem Hinter- oder Gegeneinanderschalten der beiden Thermoelemente unter einer dann erforderlichen Isolation gegenüber den Stäben und

Ringen nach dem Vorgange von L. Lorenz¹⁾ konnte ich mich nicht entschließen.

Bei der sehr exakten Bestimmung der einzelnen Temperaturen nach der Kompensationsmethode gaben die in dieser Weise angestellten Versuche einigermaßen befriedigende Resultate. Zu brauchbaren Werten jedoch konnten auch sie nicht führen: Die einzelnen Temperaturmessungen können nur zeitlich nacheinander ausgeführt werden und sind somit zur Berechnung von a^2 auf dieselbe Zeit zu interpolieren. Einmal kommen durch diese Interpolationsrechnung Fehler hinein, weil die Temperaturänderungen keineswegs der Zeit proportional erfolgen, vielmehr bei der Umrechnung mindestens das zweite Glied der Newtonschen Interpolationsformel berücksichtigt werden muß, sodann können Beobachtungsfehler infolge des Kombinierens zweier Messungen leicht den doppelten Einfluß gewinnen. Diesen recht erheblichen Nachteilen steht nur ein einziger geringer Vorteil gegenüber, nämlich das leichte und sichere Anbringen der Korrekturen betreffs der nicht vorhandenen Proportionalität der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente mit der Temperatur. Da dies jedoch nur ein Korrektionsglied ist — Neumann hat es ganz vernachlässigt —, so genügt hierzu natürlich die ungefähre Kenntniss der einzelnen Temperaturen, wie sie durch Interpolation von Summe und Differenz auf dieselbe Zeit gegeben ist.

Es scheint somit am praktischsten, Summe und Differenz direkt zu messen, trotzdem dadurch die Korrektionsrechnung betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente mühsamer wird. Die Zeitbestimmung wird genau, was auf das Resultat von größtem Einfluß ist.

Alle Vorteile der einzelnen Methoden in einer einzigen möglichst zu vereinen, ist nach dem bisherigen nur möglich, wenn eine Nullmethode geschaffen wird, die eine direkte Messung von Summe und Differenz zweier elektromotorischer Kräfte ohne Hinter- bez. Gegeneinanderschalten der einzelnen elektromotorischen Kräfte gestattet. Ich habe daher die Neumannsche Methode durch Herstellung gleicher elektromotorischer Kräfte mit Hilfe des Kompensationsapparates in eine Nullmethode übergeführt, wobei ich

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 423. 1881.

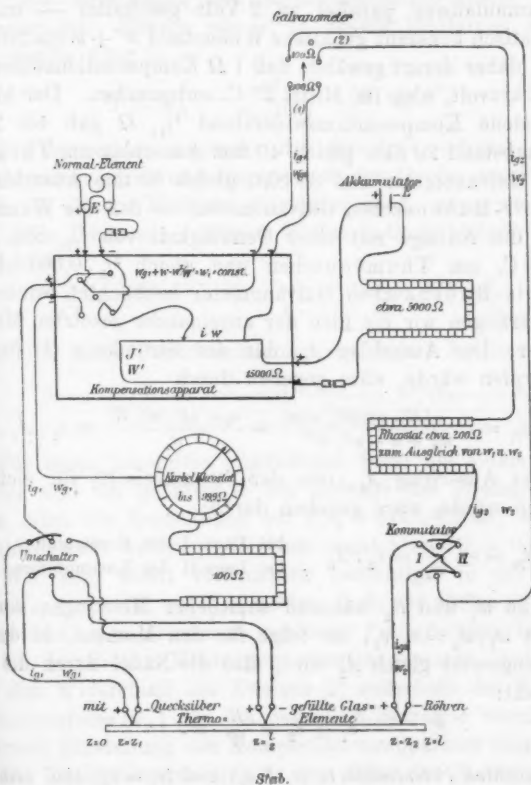
mir zugleich alle Vorzüge des Kompensationsapparates zunutze machte.

Meiner Methode liegt folgender Gedanke zugrunde: Das *eine* Thermoelement (elektromotorische Kraft e_1) wird an einen Kompensationsapparat angelegt, der unter Kontrolle eines stets stromlos benutzten Normalelementes der Reihe nach auf die Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ und $(e_1 - e_2)$ eingestellt wird und durch die *eine* Spule (1) des Differentialgalvanometers geschlossen ist. Das *andere* Thermoelement (elektromotorische Kraft e_2) wird während des Versuches ständig durch die *andere* Spule (2) des Differentialgalvanometers geschlossen. Ein in diesem Stromkreise (2) befindlicher Kommutator gestattet dann die beiden Zweige des Differentialgalvanometers gleichen elektromotorischen Kräften $+e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2)$ bez. $-e_2 = -e_1 + (e_1 - e_2)$ auszusetzen, so daß bei passend abgeglichenen Widerständen die Nadel des Differentialgalvanometers in Ruhe verharret.

Es wird zunächst durch *Einstellung des Kompensationsapparates auf verschwindendes w* der zur späteren Herstellung der Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ bez. $(e_1 - e_2)$ erforderliche Akkumulatorenkreis *ausgeschaltet*, und es werden die Widerstände w_1 und w_2 der beiden Zweige des Differentialgalvanometers derart abgeglichen, daß die Wirkung einer und derselben elektromotorischen Kraft durch die beiden Zweige sich aufhebt, die Nadel also in der Ruhelage läßt. Bezeichnen wir mit A den Ausschlag, den der einzelne Zweig hervorrufen würde, so wäre dann: $e/w_1 = c_1 \cdot A$, und $e/w_2 = c_2 \cdot A$, also: $w_1/w_2 = c_2/c_1 = c$. Die somit geforderte Unveränderlichkeit des Verhältnisses der Widerstände w_1/w_2 wurde am Ende jeder Beobachtungsreihe in der Form kontrolliert, daß sich die Widerstände w_1 und w_2 einzeln tatsächlich unverändert ergaben.

Es wird sodann durch *Einstellung des Kompensationsapparates auf endliche w* der zur Herstellung der Potentialwerte $(e_1 + e_2)$ bez. $(e_1 - e_2)$ erforderliche Akkumulatorenkreis *eingeschaltet*. Um während sämtlicher Einstellungen — d. h. bei variablem w ($w < 100 \Omega$) — den abgeglichenen Widerstand w_1 konstant zu halten, ist der Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_g) um den Betrag $w - w^2/W$ zu vermindern, was mittels eines Kurbelrheostaten leicht geschehen kann.

Die gesuchten Potentialwerte ($e_1 + e_2$) bez. ($e_1 - e_2$) werden dadurch auf die elektromotorische Kraft eines Normalelementes zurückgeführt, daß vor jeder Messung zunächst der Stammstrom $E'/(W' + w)$ geschlossen und an diesem die elektro-



Schaltungsskizze.

motorische Kraft des Normalelementes (E) kompensiert wird. Ist W der hierzu erforderliche Kompensationswiderstand (ca. 10000Ω), so folgt: $E = E' \cdot W / (W' + W)$, worin $W' + W$ der automatisch konstant gehaltene Widerstand des Stammstromes ist.

Zum leichten Anbringen der Korrekturen betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente war ein einfaches Zahlenverhältnis zwischen Kompensationswiderständen und Celsiusgraden erwünscht. Die hilfelektromotorische Kraft E' — 4 Akkumulatoren parallel zu 2 Volt geschaltet — und der automatisch konstant gehaltene Widerstand $W' + w$ (ca. 20 000 Ω) waren daher derart gewählt, daß 1 Ω Kompensationswiderstand 107 Mikrovolt, also im Mittel 2° C. entsprachen. Der kleinste vorhandene Kompensationswiderstand $\frac{1}{10}$ Ω gab bei $2\frac{1}{2}$ mm Skalenabstand 20 Skt. gleich 40 mm Ausschlag am Thomsonschen Galvanometer und 30 Skt. gleich 60 mm Ausschlag am du Bois-Rubensschen Galvanometer, so daß die Wanderung durch die Nullage mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Skt. gleich 0,001° C. am Thomsonschen und gleich $\frac{2}{3}$ · 0,001° C. am du Bois-Rubensschen Galvanometer beobachtet wurde.

Verfolgen wir die Idee der auseinander gesetzten Methode genauer: Der Ausschlag A_1 , den der Stromkreis (1) für sich hervorrufen würde, wäre gegeben durch

$$i_{g_1} = \frac{e_1 - (E' \cdot w)/(W' + w)}{w_{g_1} + w - w^2/W'} = \frac{e_1 - (E \cdot w)/W}{w_1} = c_1 \cdot A_1.$$

Der Ausschlag A_2 , den der Stromkreis (2) für sich hervorrufen würde, wäre gegeben durch:

$$i_{g_2} = \pm \frac{e_2}{w_2} = c_2 \cdot A_2 \quad \begin{array}{l} + \text{ bei Lage I des Kommutators.} \\ - \text{ bei Lage II des Kommutators.} \end{array}$$

Sind nun w_1 und w_2 während sämtlicher Messungen konstant und ist $w_1/w_2 = c_2/c_1$, so folgt für den Moment, in dem A_1 entgegengesetzt gleich A_2 wird, also die Nadel durch die Nullage geht:

$$e_1 \pm e_2 = \frac{E}{W} \cdot w.$$

Die gesuchten Potentialwerte ($e_1 + e_2$) und ($e_1 - e_2$) sind somit auf die elektromotorische Kraft (E) eines stromlos benutzten Normal-elementes zurückgeführt. Der im Kompensationsapparat eingestellte Widerstand ist proportional zu setzen: der Summe ($e_1 + e_2$) bei Lage I des Kommutators, der Differenz ($e_1 - e_2$) bei Lage II des Kommutators.

Eine genauere Untersuchung der hier vorliegenden Größenordnungen zeigt übrigens, daß es nicht nötig ist, streng

$w_1 = w_{g_1} + w - w^2/W' = \text{konst.}$ zu setzen, sondern daß es schon genügt, für w_1 den Wert $w_{g_1} + w = w'_1 = \text{konst.}$ einzustellen, also den Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_{g_1}) um denselben Betrag w zu vermindern, der durch Einstellung des Kompensationsapparates hinzugekommen ist. Führen wir w'_1 in unsere Endformel ein, so geht dieselbe über in:

$$e_1 \pm e_2 \left(1 - \frac{w^2}{w'_1 \cdot W'} \right) = (E \cdot w) / W.$$

Wir betrachten nunmehr das Glied $(e_2 \cdot w^2)/(w'_1 \cdot W')$ als ein Korrektionsglied und fragen nach der Größe des Fehlers, welcher in unsere Methode eingeführt wird, wenn wir dieses Glied ganz fortlassen. Dieses Fehlerstudium knüpft an das Hauptglied:

$$\beta_2 = \frac{\ln(\vartheta_2 = z_1 - \vartheta_2 = z_2)t_1 - \ln(\vartheta_2 = z_1 - \vartheta_2 = z_2)t_2}{t_2 - t_1}$$

und ergibt unter Berücksichtigung von $\ln(x + \delta) = \ln x + \delta/x$:

$$d\beta_2 = \frac{(\vartheta_2 = z_2 \cdot w^2 / (\vartheta_2 = z_1 - \vartheta_2 = z_2))t_1 - (\vartheta_2 = z_2 \cdot w^2 / (\vartheta_2 = z_1 - \vartheta_2 = z_2))t_2}{w'_1 \cdot W' \cdot (t_2 - t_1) = 360000000}.$$

Für einen besonders ungünstigen Fall: bei einem Eisenzylinder und bei größtem w am Anfange des Beobachtungssatzes führt die Berechnung auf $d\beta_2 = 0,00000065$, während der theoretisch zulässige Beobachtungsfehler $d\beta_2 = 0,000013$ ist. Wir sind somit vollkommen berechtigt, in der obigen Formel $e_1 \pm e_2 = (E \cdot w) / W$ zu setzen, d. h. wir dürfen w_1 mit w'_1 vertauschen. Die hierdurch gegebene Vereinfachung habe ich mir bei sämtlichen Messungen zunutze gemacht, indem ich stets den Widerstand des Zweiges (1) außerhalb des Kompensationsapparates (w_{g_1}) nur um denselben Betrag w verminderte, der durch Einstellung des Kompensationsapparates hinzukam.¹⁾

Die Temperaturmessung in der Mitte des Stabes erfolgte durch gewöhnliche stromlose Kompensation und es konnte daher dies Thermoelement mit dem an den Kompensationsapparat angelegten mittels Umschalters ausgewechselt werden.

1) Hierzu genügte während der eigentlichen Beobachtungen ein Karbeldreostat von 99,9 Ohm. Zur Messung der Temperatur im stationären Anfangszustande waren noch weitere 100 Ohm erforderlich.

Die definitive Messung setzte ich aus drei *getrennten* Beobachtungsreihen zusammen:

$$\text{I. } \vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2},$$

$$\text{II. } \vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2},$$

$$\text{III. } \vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2} \text{ und } \vartheta_{z=z_1/2} \text{ alternierend.}$$

Aus I und II können durch Kombination $\vartheta_{z=z_1}$ und $\vartheta_{z=z_2}$ für jede Beobachtung einzeln näherungsweise ermittelt und die so erhaltenen Werte zum Anbringen der Korrekturen betreffs der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente benutzt werden. Sodann erhält man aus I: β_2 und aus II: β_1 . Beobachtungsreihe III liefert die Kosinus, wobei noch zum Anbringen der Korrekturen Reihe I benutzt wird. Um Differenzen und Summen der einzelnen Beobachtungsreihen näherungsweise auf dieselbe Zeit interpolieren zu können, wurde für jede Beobachtungsreihe nahezu derselbe stationäre Anfangszustand hergestellt und außerdem noch nach Schluß der Differenzmessungen einige Summen und vice versa beobachtet. Die Interpolation wurde dann von einem Zeitpunkte aus vorgenommen, für den in beiden Serien die Summen bez. Differenzen denselben Wert hatten.

Die definitiven Messungen sind sämtlich sowohl mit einem Thomsonschen astatischen Galvanometer als auch mit einem du Bois-Rubenssches Kugelpanzergalvanometer durchgeführt worden. Während das erstere seiner schlechten Dämpfung wegen verlassen wurde, genügte das letztere völlig allen zu stellenden Ansprüchen. Dasselbe war seines kurzen Aufhängefadens wegen mittels einer Juliusschen Aufhängung völlig erschütterungsfrei aufgehängt worden. Die Empfindlichkeit des Thomsonschen Galvanometers — vier Spulen von je 100 Ω Widerstand, von denen (1) mit (2) und (3) mit (4) zu je einem Paare verbunden waren — war für jedes der beiden Spulenpaare $2,3 \cdot 10^{-9}$ Amp. gleich 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand. Die Empfindlichkeit des du Bois-Rubensschen Galvanometers — zwei Spulen von je 100 Ω Widerstand — war für jede einzelne Spule $1,5 \cdot 10^{-9}$ Amp. gleich 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand. Der Durchgang der Nadel durch die Nullage wurde mittels eines $\frac{1}{2}$ Sek. schlagenden Chronometers auf $\frac{1}{10}$ Sek. genau geschätzt.

Die *Thermoelemente* waren, um die Versuche auch in höheren Temperaturen anstellen zu können, in feine Bohrlöcher des Stabes eingestemmt und durch einen äußerst kleinen Metallkeil festgeklemt.

Die *Abkühlung* der in bestimmter — auf p. 924 auseinandergesetzten — Weise eingeleiteten anfänglichen Erwärmung der Stäbe und Ringe wurde der Beobachtungsanordnung von Neumann entsprechend in einem von Wasser durchströmten Blechkasten mit Hohlraum vorgenommen. Wurde der Hahn der Wasserleitung etwa $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Stunde vor Beginn der Beobachtung geöffnet, so gelang es, die Wände des Hohlzylinders während der Messung auf konstanter Temperatur zu halten. Um — was unbedingt nötig — ein schnelles Aus- und Einbringen des Stabes zu ermöglichen, war derselbe mit seinen Thermodrähten an einem Holzgestell befestigt, an dem er frei hing. Der Hohlzylinder war oben durch Klappen verschlossen, die sich zum Einbringen des Stabes leicht öffnen ließen. Die zweiten Kontaktstellen der Drähte befanden sich in U-förmig gebogenen, mit Quecksilber gefüllten Glasröhrchen. Sämtliche Glasröhrchen waren mittels einer Holzleiste an dem Hängegestell derart befestigt, daß sie, sobald der Stab in den Hohlzylinder eingehängt wurde, in das den Zylinder umgebende Wasser eintauchten, bereits nach wenigen Minuten¹⁾ die Temperatur des Wassers annahmen und so auf der konstanten Umgebungstemperatur des Stabes gehalten wurden.

Ein besonderes Studium wandte ich den *Ausstrahlungsvorgängen an der Oberfläche*, der sogenannten *äußeren Wärmeleitfähigkeit* zu. Ich beobachtete teils bei rauher, teils bei glatter Oberfläche des Stabes, bald mit schwach und bald mit stark berußten und mit unberußten Stäben. Das Resultat aller dieser Versuche war: *Veränderungen in der Beschaffenheit der Oberfläche haben keinen Einfluß auf die Bestimmung der inneren Leitfähigkeit, wenn die gesamte Oberfläche annähernd gleichmäßig verändert wird. Starke partielle Änderungen hingegen können das Resultat verfälschen.*

Diese Wahrnehmungen lehrten zugleich, daß bei gut leitenden Materialien die Verlegung der Ausstrahlungsvorgänge

1) Es wurde etwa 4 Min. gewartet.

in evakuierte Räume, welche Hr. Hecht in seiner Arbeit bei schlecht leitenden Materialien mit Vorteil verwandt hatte, unnötig war. Es wäre auch sehr mißlich gewesen, wenn sich dieses als nötig erwiesen hätte, weil der Stab oder Ring nur an einer einzigen Stelle zu erwärmen ist und die Abkühlung sehr schnell fortschreitet.

Waren nach meinen Wahrnehmungen starke partielle Änderungen der Oberfläche zu vermeiden, so bedurfte die *Herstellung des Anfangszustandes* ohne Eintreten solcher partieller Oberflächenänderungen eines weiteren besonderen Studiums. Vor allem mußte die einfachste Erwärmung — Wirkung von Flammengasen — vermieden werden. Ich folgte der von L. Lorenz¹⁾ angewandten Erwärmungsmethode. Dieser führte eine im voraus erwärmte Stange an die zu erhitzende Stelle heran und steigerte die Erwärmung der genannten Stange noch während des Versuches durch eine kleine Lampe. Ich ließ zum Erhitzen der Stäbe und Ringe einen besonderen Erwärmungsapparat herstellen.

Die Erwärmung der *Stäbe* erfolgte durch Überleiten der Wärme von einem heißen Messingblock auf den an diesen angelegten Stab. Der Messingblock befand sich in einem Asbestzylinder und ragte nur durch eine eng anschließende Öffnung mit der an den Stab anzulegenden Fläche heraus. Der den Messingblock erhaltende Bunsenbrenner stand im Asbestzylinder und kam demnach mit dem Stabe in keine Berührung. Der Asbestzylinder war oben durch einen Deckel, in dem sich ein kleiner Schornstein befand, verschlossen.

Zum Erwärmen der *Ringe* wurde ein zweiter Asbestdeckel verwandt, in den eine kreisförmige Öffnung eingeschnitten war. Über diese wurde ein niedriger, hart gelöteter Kupferkegel gesetzt. In die Spitze desselben war ein dem Ring sich eng anschmiegendes U-förmig gebogenes Kupferblech hart eingelötet, in welches die zu erwärmende Stelle des Ringes ($z=l/8$) eingepreßt wurde. Einige feine Eisenspäne stellten vollständigen Kontakt her.

Schließlich erwähne ich noch, daß sämtliche Kontaktstellen in der Schaltung mit Watte umwickelt waren und definitive

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 431. 1881.

Messungen nur bei angenähert konstanter Zimmertemperatur stattfanden. Es gelang so vollständig, *fremde störende Thermoeffekte abzuhalten*. Die Abkühlung und Erwärmung der Stäbe und Ringe erfolgte aus demselben Grunde in einem zweiten Zimmer, und es waren die Zuleitungsdrähte durch Bohrlöcher der Türe geführt.

Bevor ich zu den definitiven Messungen überging, habe ich die Versuche in mannigfaltiger Weise variiert. Insbesondere wurden die Thermodrähte in verschiedener Entfernung von den Enden des Stabes bez. in verschieden weit von der Erwärmungsstelle abstehenden Querschnitten des Ringes befestigt; ferner erfolgte die Erwärmung sowohl von dem einen als auch von dem anderen Ende des Stabes bez. Querschnitte des Ringes aus, und es wurde dieselbe zu verschiedenen hohen, teils stationären, teils veränderlichen Anfangszuständen getrieben. Die Messung von $\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}$, $\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}$ und $\vartheta_{z=1/2}$ erfolgte teils in getrennten, teils in einer einzigen Versuchsreihe. — Das Resultat dieser Vorversuche ist kurz folgender: Der Abstand der Thermoelemente von den Endflächen des Stabes hat auf die Bestimmung von a^2 keinen Einfluß, jedoch ist es praktisch, bei längeren Stäben die Thermoelemente in weiterer Entfernung von den Endflächen, bei kürzeren in Nähe derselben zu befestigen. Inhomogenitäten des Materials, die sich bei Beobachtungen unter Vertauschung der Stabenden und Ringquerschnitte hätten zeigen müssen, wurden nicht bemerkt. Als Anfangszustand empfiehlt sich wegen des stärkeren Konvergierens der Reihen der stationäre Temperaturzustand. Die Höhe der Temperaturen im Anfangszustande ist entsprechend der Leitfähigkeit passend zu wählen. Die Messung von $\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}$, $\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}$ und $\vartheta_{z=1/2}$ in getrennten Versuchsreihen erhöht die Genauigkeit des Resultates.

III. Berechnung der Koeffizienten der einzelnen Reihenentwickelungen unter Zugrundelegung eines nahezu stationären Anfangszustandes.

Bevor ich den Einfluß der einzelnen Fehlerquellen auf das Resultat angeben kann, muß ich zunächst die Stärke der Konvergenz der Fourierschen Reihen feststellen; jedoch ist hervorzuheben, daß infolge der Kombination, in welcher die

Reihen rechnerisch verwandt werden, eine Beschränkung auf die ersten Glieder bereits viel früher gestattet ist, als die einzelnen Reihen für sich genügend stark konvergieren. Die theoretische und rechnerische Durchführung dieser Behauptung kann erst nach Auswertung der Koeffizienten gegeben werden, und ich gehe daher zunächst zu dieser über:

Die Funktion, die die Temperatur im Anfangszustande darstellt, sei $F(z)$, d. h.

$$(31a) \quad F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot \left\{ \cos(\gamma_n z) + \frac{b}{\gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n z) \right\},$$

$$(31b) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \cos(\gamma_n z).$$

Wie bereits erwähnt, wurde für $F(z)$ aus praktischen Gründen (vgl. p. 922 und auch p. 925) stets ein nahezu stationärer Anfangszustand gewählt. Für den stationären Zustand verschwindet in der allgemeinen Differentialgleichung der Differentialquotient nach der Zeit und Gleichung (1) geht somit über in:

$$(32) \quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - f^2 \cdot \Theta = 0,$$

wenn Θ die Temperatur im stationären Zustande ist. Die Lösung dieser Gleichung findet sich schon bei Fourier.¹⁾ Es folgt:

$$(33) \quad \Theta = C \cdot e^{-z \cdot \sqrt{f^2/a^2}} + D \cdot e^{+z \cdot \sqrt{f^2/a^2}},$$

worin C und D zwei Konstante sind, welche durch die bestehenden Nebenbedingungen ihre Bestimmung finden: Die durch den angelegten Kupferblock bez. das U-förmige Blech in $z=0$ hervorgerufene stationäre Temperatur ist $\Theta_{z=0} = C + D$. Denkt man sich ferner den Stab von $z=0$ bis $z=\infty$ ausgedehnt und ebenfalls nur in $z=0$ erwärmt, so folgt $D=0$, weil sonst Θ für $z=\infty$ nicht Null würde. Für einen endlichen Stab hat auch D einen endlichen, wenn auch kleinen Wert. Aus der Grenzbedingung (3a) ergibt sich:

$$\frac{\partial \Theta_{z=l}}{\partial x} = -b \cdot \Theta_{z=l},$$

1) Fourier, Theorie der Wärme (deutsche Ausgabe von Weinstein) p. 40. 1884.

d. h.

$$(34a) \quad D = \Delta \cdot C, \text{ wenn } \Delta = \frac{\sqrt{f^2/a^2 - b}}{\sqrt{f^2/a^2 + b}} \cdot \frac{e^{-l} \cdot \sqrt{f^2/a^2}}{e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2}}.$$

Wird der Ring, wie ich es stets getan habe, nur in $z = 0$ erwärmt, so wird für $z = l/2$: $\partial \Theta_{z=l/2} / \partial z = 0$, d. h.

$$(34b) \quad C = D \cdot e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2}.$$

Unter Rücksicht auf diese Bedingungsgleichungen erhält man dann nach dem Lagrangeschen Verfahren (vgl. Dissertation p. 53—56):

$$(35a) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \cdot \frac{\gamma_n^2}{b^2 + \gamma_n^2} \cdot C \cdot \frac{a^2}{\beta_n} \\ &\cdot \left[\left\{ e^{-l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} + \Delta \cdot e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} \right\} \cdot \left\{ \gamma_n \cdot \sin(\gamma_n l) - b \cdot \cos(\gamma_n l) \right\} \right. \\ &\quad \mp \left. \sqrt{f^2/a^2} \cdot \left\{ e^{-l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} - \Delta \cdot e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + b \cdot (1 + \Delta) + \sqrt{f^2/a^2} (1 - \Delta) \right], \end{aligned} \right.$$

$$(35b_1) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{2D}{l \cdot (f^2/a^2 + \gamma_n^2)} \cdot \sqrt{f^2/a^2} \cdot 2 \\ &\cdot (e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} - 1) = 2 \cdot A_0 \cdot f^2 / \beta_n, \end{aligned} \right.$$

$$(35b_2) \quad A_0 = \frac{D}{l \cdot \sqrt{f^2/a^2}} \cdot 2 \cdot \left\{ e^{+l} \cdot \sqrt{f^2/a^2} - 1 \right\}.$$

Während demnach beim Ringe $A_n = \text{konst.} \cdot 1/\beta_n$ ist, wird beim Stabe der genaue Wert A_n durch eine recht komplizierte Formel dargestellt. Nichtsdestoweniger ist auch beim Stabe das rasche Abnehmen der A_n im wesentlichen durch das schnelle Wachsen der β_n bedingt, und zwar derart, daß man in erster Annäherung sogar setzen darf: $A_n = \text{konst.} \cdot 1/\beta_n$.

Folgende Zahlen mögen eine Anschauung von der Größenordnung der einzelnen Glieder geben: Für den im Anhang der Dissertation angeführten Versuch mit Eisenstab I ist:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0,0127, & \gamma_1 \cdot l &= 0,3112 & \text{in der Nähe von } 0, \\ \gamma_2 &= 0,1296, & \gamma_2 \cdot l &= 3,1752 & \text{,, ,, ,, ,, } \pi = 3,1416, \\ \gamma_3 &= 0,2575, & \gamma_3 \cdot l &= 6,3088 & \text{,, ,, ,, ,, } 2\pi = 6,2832, \\ \gamma_4 &= 0,3857, & \gamma_4 \cdot l &= 9,4497 & \text{,, ,, ,, ,, } 3\pi = 9,4248, \\ \gamma_n \cdot l &\text{ konvergiert mit wachsendem } n \text{ gegen } (n-1) \cdot \pi. \end{aligned}$$

1) - für $\sin(\gamma_n l) > 0$ und + für $\sin(\gamma_n l) < 0$.

$$\beta_1 = 0,00092, \quad \gamma_1^2/(b^2 + \gamma_1^2) = 0,97576,$$

$$\beta_2 = 0,00381, \quad \gamma_2^2/(b^2 + \gamma_2^2) = 0,99976,$$

$$\beta_3 = 0,01238, \quad \gamma_3^2/(b^2 + \gamma_3^2) = 0,99994,$$

$$\beta_4 = 0,02667, \quad \gamma_4^2/(b^2 + \gamma_4^2) = 0,99997.$$

$$\Delta = 0,0277, \quad \sqrt{f^2/a^2} = 0,0721,$$

$$(e^{-t \cdot \sqrt{f^2/a^2}} + \Delta \cdot e^{+t \cdot \sqrt{f^2/a^2}}) = 0,333,$$

$$\sqrt{f^2/a^2} (e^{-t \cdot \sqrt{f^2/a^2}} - \Delta \cdot e^{+t \cdot \sqrt{f^2/a^2}}) = 0,000649,$$

$$b \cdot (1 + \Delta) = 0,00206, \quad \sqrt{f^2/a^2} (1 - \Delta) = 0,07011.$$

$$A_1 = \text{konst.} \cdot 75,90, \quad 1/\beta_1 = 1087,0,$$

$$A_2 = \text{konst.} \cdot 18,87, \quad 1/\beta_2 = 262,5,$$

$$A_3 = \text{konst.} \cdot 5,90, \quad 1/\beta_3 = 80,8,$$

$$A_4 = \text{konst.} \cdot 2,63, \quad 1/\beta_4 = 37,5.$$

$$A_2 = A_1 \cdot 0,249, \quad 1/\beta_2 = 1/\beta_1 \cdot 0,241,$$

$$A_3 = A_1 \cdot 0,078, \quad 1/\beta_3 = 1/\beta_1 \cdot 0,074,$$

$$A_4 = A_1 \cdot 0,035, \quad 1/\beta_4 = 1/\beta_1 \cdot 0,034.$$

IV. Auswertung des durch Beschränkung auf das erste Glied der Reihen verursachten Fehlers.

Wir haben uns bisher — für hinreichend großes t — auf das erste Glied der Reihen beschränkt, weil gerade in der ausschließlichen Verwendung dieses ersten Gliedes, wie das bereits in der Einleitung betont ist, ein wesentlicher Vorteil der Neumannschen Methode liegt, nämlich die Unabhängigkeit vom Anfangszustande. Es ist nunmehr festzustellen, was unter dem „hinreichend großen“ t zu verstehen ist, oder mit anderen Worten: es muß der durch die Beschränkung auf das erste Glied verursachte Fehler von a^3 und damit auch von k ermittelt werden.

Durch das ständige Kombinieren zweier Messungen wird dieser Fehler bedeutend kleiner, als es auf den ersten Blick scheinen mag, da infolge dieser Berechnungsweise die Zeit durchaus nicht so groß gewählt zu werden braucht, daß die Temperaturen selbst bereits ohne meßbaren Fehler durch die

Reihen (9) und (10) dargestellt werden, um den Fehler von α^2 völlig verschwinden zu lassen. Die Beschränkung auf das erste Glied besteht keineswegs darin, daß das folgende und alle weiteren Glieder als klein gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, es wird vielmehr infolge der stets vorgenommenen Differenzbildung der Logarithmen nur die *völlig verschwindende Änderung dieser kleinen Glieder in einem geringen Zeitintervall* (von Beobachtung zu Beobachtung — bei mir durchschnittlich 1 Min.) nicht berücksichtigt. Der Fehler ist nämlich von der Form:

$$\ln \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} = \delta_1 - \delta_2.$$

Da nun aber $\delta_1 - \delta_2$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ klein gewählt wird, was bei genaueren Messungen — wenigstens soweit dieselben auf den Temperaturkoeffizienten des Wärmeleitvermögens Rücksicht nehmen — stets geschehen muß, so läßt sich dieser Fehler experimentell unter jede gewünschte Grenze, also jedenfalls auch unter die sonst vorliegende Genauigkeitsgrenze herabdrücken.

Um den analytischen Ausdruck für diesen Fehler aufzustellen, beschränke ich mich der Kürze halber auf das Hauptglied β_2 . Ferner schreibe ich nur die Formeln für den Stab hin, da die entsprechenden für den Ring bis auf die Indizes genau dieselben sind. Man hat nur statt l den Index $l/2$ und statt n ($=1$ bis 6) die Indizes $n-1$ ($=0$ bis 5) einzusetzen.

Es ist

$$\frac{1}{2} \cdot \{\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l}\} = A_2 \cdot e^{-\beta_2 t} + A_4 \cdot e^{-\beta_4 t} + A_6 \cdot e^{-\beta_6 t} + \dots$$

Unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung A_4 folgt somit:

$$\beta_2 \cdot (t_2 - t_1) = \ln (\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_1} - \ln (\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_2}.$$

Unter Beibehaltung dieser Glieder hingegen, also bis auf Glieder von der Ordnung A_6 wird:

$$\begin{aligned} \beta_2 \cdot (t_2 - t_1) = & \ln [(\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_1} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_1}] \\ & - \ln [(\vartheta_{z=0} - \vartheta_{z=l})_{t_2} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_2}]. \end{aligned}$$

Der durch Fortlassen der Glieder von der Ordnung A_4 begangene Fehler ist demnach:

$$\Delta \beta_2 = 1/(t_2 - t_1) \cdot \left\{ \ln \left(1 - \frac{2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_1}}{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_1}} \right) - \ln \left(1 - \frac{2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_2}}{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_2}} \right) \right\},$$

oder

$$\Delta \beta_2 = 1/(t_2 - t_1) \cdot \ln \left(\frac{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_2}}{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_1}} \cdot \frac{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_1} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_1}}{(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_2} - 2 \cdot A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_2}} \right).$$

Setzt man hierin noch für $(\vartheta_z = 0 - \vartheta_z = i)_{t_1}$ den bis auf Glieder von der Ordnung A_6 richtigen Wert

$$2 \cdot (A_2 \cdot e^{-\beta_2 t_1} + A_4 \cdot e^{-\beta_4 t_1}),$$

so folgt:

$$\Delta \beta_2 = 1/(t_2 - t_1) \cdot \ln \left(1 + (A_4/A_2) \cdot e^{-(\beta_4 - \beta_2) t_1} - (A_4/A_2) \cdot e^{-(\beta_4 - \beta_2) t_2} \right).$$

Für das im Anhange der Dissertation durchgeführte Beispiel ist:

$$\frac{A_4}{A_2} = 0,1394, \quad \beta_4 = 0,02667, \quad \beta_2 = 0,00381.$$

Der Versuch dauert von $t = 4$ bis $t = 17$ Min. Für den Anfang des Beobachtungssatzes, d. h. für den *ungünstigsten* Fall ist somit $t_1 = 240$ und $t_2 = 300$ Sek. Hieraus ergibt sich:

$$\Delta \beta_2 = (1/60) \cdot \ln(1 + 0,00015 - 0,00058) = -0,000007$$

und

$$\Delta a^2 = \frac{\Delta \beta_2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0,000007}{0,01662} = 0,0004,$$

d. h.

$$0,2 \text{ Proz. } (a^2 = 0,173_4).$$

Mit wachsendem t nimmt dieser Fehler selbstverständlich sehr schnell ab. Für den Schluß desselben Beobachtungssatzes, d. h. für $t_1 = 16$ Min. = 960 Sek. und $t_2 = 17$ Min. = 1020 Sek. wird:

$$\Delta \beta_2 = (1/60) \cdot \ln \{ 1 + 1,0 \cdot 10^{-11} - 4,1 \cdot 10^{-11} \} = -5 \cdot 10^{-13}$$

und

$$\Delta a^2 = \frac{5 \cdot 10^{-13}}{0,01662} = 3 \cdot 10^{-11}.$$

Es steht nun jedoch nichts im Wege, auch für den Anfang des Beobachtungssatzes den vorliegenden Fehler noch weiter zu verkleinern. Man hat dann nur die Differenz $t_2 - t_1$ kleiner als 60 Sek. zu wählen, was Neumann tatsächlich getan hat, indem er von 8 zu 8 Sek. beobachtete. Ich brauche wohl kaum noch hervorzuheben, daß selbst diese Fehler noch verkleinert werden können, wenn man zwischen Unterbrechung der Erwärmung und Anfang der Beobachtungen einige weitere Minuten verstreichen läßt. Ich brach mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit des Galvanometers zur Zeit $t = 17$ Min. die Beobachtung ab. Bei einem Arrangement, das eine größere Genauigkeit als die von mir erreichte ($\frac{1}{2}$ Proz.) gestattet, muß auch die Empfindlichkeit des Galvanometers entsprechend größer sein, und man kann dann die Beobachtungen auf spätere Zeiten ausdehnen. Ja man würde wahrscheinlich sogar dazu gezwungen werden, weil für Beobachtungen zu einer früheren Zeit ein solches Galvanometer wegen der starken Temperaturänderungen am Anfange zu empfindlich sein müßte. Da aber wie gezeigt, mit wachsendem t der Fehler Δa^2 sehr schnell abnimmt und außerdem bei genauen Messungen mit Rücksicht auf den Temperaturkoeffizienten $t_2 - t_1$ klein gewählt werden muß, so kann der durch Beschränkung auf das erste Glied entstehende Fehler der Ausarbeitung eines noch so genauen Beobachtungsarrangements niemals hinderlich werden.

V. Die erreichte Genauigkeit.

(Um ein Bild von der Größenordnung der einzelnen Fehler zu geben, ist im folgenden ein Zahlenbeispiel durchgeführt worden. Die zugehörigen Beobachtungsdaten finden sich im Anhange meiner Dissertation, die ich Interessenten auf Wunsch jederzeit gerne übersende.)

Die Temperaturmessungen geschahen in der im Abschnitt II auseinandergesetzten Weise. Der Durchgang der Magnetnadel durch die Nullage wurde dabei mittels eines $\frac{1}{2}$ Sek. schlagenden Chronometers auf $\frac{1}{10}$ Sek. genau beobachtet. Dies entspricht einer Genauigkeit des Resultates von durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Proz. Es ist nämlich:

$$(d.a^2)_t = \frac{d[(\beta_2 - \beta_1)_t]}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2},$$

$$(d\beta_1)_t = \frac{\beta_1}{t_2 - t_1} d(t_2 - t_1),$$

$$(d\beta_2)_t = \frac{\beta_2}{t_2 - t_1} d(t_2 - t_1).$$

Bei gleicher Genauigkeit der Zeitbeobachtung ist somit $d\beta_1$ bedeutend kleiner als $d\beta_2$, so daß nur der letztere Fehler auszuwerten ist. Die Differenz $t_2 - t_1$ darf bis auf $\frac{1}{10}$ Sek. genau angesehen werden. Für Eisenstab I (vgl. Anhang der Dissertation) ist somit:

$$(d\beta_2)_t = \frac{0,0038}{60} \cdot 0,2 = 0,000013,$$

$$(da^2)_t = \frac{(d\beta_2)_t}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} = 0,00078, \text{ d. h. } \frac{1}{2} \text{ Proz.}$$

Es fragt sich nun, ob die Fehler in der Temperaturbestimmung auf denselben geringen Einfluß herabgedrückt werden können. Da die Temperaturdifferenz der Kontaktstellen der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente nicht proportional ist, so scheint dies zunächst, selbst bei genauer Eichung der Thermoelemente¹⁾ nicht möglich. Unterscheidet man jedoch scharf zwischen willkürlichen Beobachtungsfehlern einerseits und stets in demselben Sinne in das Resultat eingehenden Fehlern andererseits, so zeigt sich, daß die obige Genauigkeit wohl erreichbar ist. Wir können uns wieder auf das Hauptglied $\beta_2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ beschränken. Es ist:

$$(d\beta_2)_\phi = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \left\{ \frac{d\vartheta}{(\vartheta_{z=z_2} - \vartheta_{z=z_1})_{t_2}} - \frac{d\vartheta}{(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})_{t_1}} \right\}.$$

Für willkürliche, teils positiv, teils negativ zu nehmende Beobachtungsfehler ist somit:

$$(d\beta_2)_\phi = \frac{2 \cdot d\vartheta}{(t_2 - t_1) \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})} = \frac{d\vartheta}{30 \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})}.$$

Soll nun $(da^2)_\phi$ von derselben Größenordnung wie $(da^2)_t$ sein, so folgt:

$$d\vartheta = 30 \cdot 0,000013 \cdot (\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}),$$

1) Bei den von mir benutzten Thermoelementen fand mit zunehmender Temperatur ein Ansteigen der elektromotorischen Kraft pro 1°C . statt. Es ergab sich $e = 52,02 + 0,018 \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$, worin $\vartheta - \vartheta_u$ die Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen und e die elektromotorische Kraft pro 1°C . in Mikrovolt ist. Näheres über die Aufstellung dieser empirischen Formel ergibt die Tabelle auf p. 50 der Dissertation.

also für den Anfang des Beobachtungssatzes

$$(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2} = 54^\circ): \quad d\vartheta = 0,02^\circ \text{ C.}$$

und für den Schluß des Beobachtungssatzes

$$(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2} = 3^\circ): \quad d\vartheta = 0,001^\circ \text{ C.}$$

Die Empfindlichkeit des Galvanometers war, wie bereits p. 920 erwähnt ist, derart reguliert, daß die Wanderung durch die Nullage mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Skt. = $0,001^\circ \text{ C.}$ bei den Messungen mit Hilfe des Thomsonschen Galvanometers und $\frac{1}{8}$ $0,001^\circ \text{ C.}$ bei den Messungen mit Hilfe des Kugelpanzergalvanometers beobachtet wurde. Hieraus geht hervor, daß selbst am Schluß des Beobachtungssatzes, d. h. im ungünstigsten Falle, die Empfindlichkeit des Galvanometers gerade noch der gewünschten Genauigkeit von $\frac{1}{2}$ Proz. genügt.

Wenn nun auch das Galvanometer eine Temperaturmessung bis auf $0,001^\circ \text{ C.}$ gestattet, so dürfte die Umrechnung der beobachteten Mikrovolt in Celsiusgrade bis zu dieser Genauigkeit nur bei aufs genaueste geeichten Thermoelementen und vor allem nur durch äußerst mühsame Rechnung möglich sein. Bei der von mir durchgeführten Eichung ist eine solche Umrechnung nicht möglich, aber auch, wie im folgenden gezeigt werden soll, nicht nötig.

Dadurch, daß die elektromotorische Kraft der benutzten Thermoelemente der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen nicht proportional ist, gehen in die einzelnen Rechnungen Fehler ein, die keineswegs willkürlich, d. h. nicht teils positiv, teils negativ sind. Diese Fehler machen sich vielmehr stets in demselben Sinne geltend, müssen also auch mit dem richtigen Vorzeichen genommen werden. Somit wird für diese Fehler:

$$d\vartheta = \frac{(t_2 - t_1) \cdot (d\beta_2)\vartheta}{1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})t_1 - 1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})t_2}$$

oder

$$d\vartheta = \frac{60 \cdot 0,000013}{1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})t_1 - 1/(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})t_2}$$

Hieraus folgt für den Anfang des Beobachtungssatzes:

$$d\vartheta = \frac{0,00078}{\frac{1}{54} - \frac{1}{48}} = 0,2^\circ \text{ C.}$$

und für den Schluß des Beobachtungssatzes:

$$d\vartheta = \frac{0,00078}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} = 0,01^\circ \text{ C.}$$

In den höheren Temperaturen (54, genauer 53,61, ist entstanden aus 131,14 — 77,53) hat also die Umrechnung der Mikrovolt in Celsiusgrade bis auf $0,2^\circ \text{ C.}$, in den niederen (4, genauer 3,95, ist entstanden aus 57,48 — 53,53) bis auf $0,01^\circ \text{ C.}$ genau zu erfolgen. In der Praxis genügt es vollständig, in der Formel $e = 52,02 + 0,018 \vartheta$ für ϑ den doppelten Kompensationswiderstand zu setzen, wie dies auf p. 65 der Dissertation näher begründet ist. Der Bequemlichkeit halber waren nach $\frac{1}{10}$ Ohm fortschreitende Tabellen angelegt worden, aus denen die Celsiusgrade direkt entnommen werden konnten.

$$1 \text{ Ohm} = [107/(52,02 + 0,036 \cdot \Omega)]^\circ \text{ C.}$$

Es ist nun noch der Einfluß eines Fehlers bei der Bestimmung von $\gamma_2^2 - \gamma_1^2$ zu ermitteln. Direkt durch die Beobachtung wird nur γ_1 bestimmt. γ_2 ergibt sich indirekt durch Rechnung aus γ_1 und Messung von $l/2$ und $z_2 - z_1$. Es ist nämlich

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \cdot \vartheta_{z=l/2}} = \cos \left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2} \right),$$

$$\gamma_1 \cdot \text{tg}(\gamma_1 l/2) = +b \quad \text{und} \quad \gamma_2 \cdot \text{ctg}(\gamma_2 l/2) = -b.$$

Der durch $d\gamma_1$ in γ_2 hervorgerufene Partialfehler $(d\gamma_2)_{\gamma_1}$ hat stets dasselbe Vorzeichen wie $d\gamma_1$, was für $d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ von Wichtigkeit ist. Aus diesem Grunde wird $(da^2)_{\gamma_2 - \gamma_1}$ verhältnismäßig klein. Es ist:

$$(d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2))_{\gamma_1} = \pm 2 \cdot (\gamma_2 \cdot (d\gamma_2)_{\gamma_1} - \gamma_1 \cdot d\gamma_1)$$

und

$$(d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2))_{l/2} = \pm \gamma_2 \cdot (d\gamma_2)_{l/2}.$$

Soll nun $(da^2)_{\gamma_2 - \gamma_1}$ von derselben Größenordnung sein wie die anderen Partialfehler, so folgt aus

$$(da^2)_{\gamma_2 - \gamma_1} = 0,00078: \quad d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = 0,000075.$$

Werden die Längenmessungen, was leicht möglich ist, bis auf 0,1 mm genau ausgeführt, so macht sich ihr Einfluß eigentlich nur in γ_2 bemerkbar, und es genügt völlig, den Kosinus bis

auf 0,001 genau zu ermitteln, was ebenfalls keine Schwierigkeit bereitet.¹⁾

Für $d(\text{Kosinus}) = 0,001$ und $d(z_2 - z_1) = 0,02$ cm folgt aus

$$d \cos \left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2} \right) = \sin \left(\gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{2} \right) \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} \cdot (d\gamma_1)_{\text{Kosinus}}:$$

$$(d\gamma_1)_{\text{Kosinus}} = 0,00069$$

und aus

$$(d\gamma_1)_{z_2 - z_1} = \frac{\gamma_1}{z_2 - z_1} \cdot d(z_2 - z_1): \quad (d\gamma_1)_{z_2 - z_1} = 0,00001_2.$$

Somit ist jedenfalls:

$$d\gamma_1 \leq 0,00070.$$

Ferner wird:

$$(db)_{\gamma_1} = \left(\frac{\gamma_1}{\cos^2(\gamma_1 l/2)} \cdot l/2 + \text{tg}(\gamma_1 l/2) \right) \cdot d\gamma_1 \leq 0,00022$$

und

$$(db)_{l/2} = \frac{\gamma_1^2}{\cos^3(\gamma_1 l/2)} \cdot d(l/2) \leq 0,000002,$$

also:

$$db \leq 0,00022.$$

Schließlich ergibt sich aus:

$$\left\{ -\gamma_2 \cdot \frac{1}{\sin^3(\gamma_2 l/2)} \cdot l/2 + \text{ctg}(\gamma_2 l/2) \right\} (d\gamma_2)_b = db:$$

$$(d\gamma_2)_b \leq 0,00017$$

und aus

$$\left\{ -\gamma_2 \cdot \frac{1}{\sin^3(\gamma_2 l/2)} \cdot l/2 + \text{ctg}(\gamma_2 l/2) \right\} \cdot (d\gamma_2)_{l/2} = \frac{\gamma_2^2}{\sin^3(\gamma_2 l/2)} \cdot d(l/2):$$

$$(d\gamma_2)_{l/2} \leq 0,00011.$$

Somit wird endlich:

$$d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \leq 0,00005_4$$

der Einfluß von $d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$ ist demnach kleiner als der der übrigen Partialfehler.

Was schließlich noch die Bestimmung des Kosinus bis auf 0,001 genau betrifft, so ist bei den Temperaturmessungen

1) Vgl. hierzu das im Anhang der Dissertation durchgeführte Beispiel.

$(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2})$ und $\vartheta_{z=1/2}$ keineswegs dieselbe Genauigkeit nötig wie etwa bei der Bestimmung der Differenzen $(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2})$. Aus

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} = \cos \left(\gamma_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} \right)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} d(\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}) - \frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \cdot (\vartheta_{z=1/2})^2} \cdot d(\vartheta_{z=1/2}) \\ = d \cos \left(\gamma_1 \frac{x_2 - x_1}{2} \right) \leq 0,001, \end{aligned}$$

oder, da

$$\frac{\vartheta_{z=z_1} + \vartheta_{z=z_2}}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}}$$

nahezu gleich 1 ist,

$$\frac{1}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} \cdot d(\vartheta_{z=z_1} - \vartheta_{z=z_2}) - \frac{1}{\vartheta_{z=1/2}} \cdot d(\vartheta_{z=1/2}) \leq 0,001.$$

Es wird daher für willkürliche Beobachtungsfehler:

$$\pm \frac{3}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} \cdot d\vartheta \leq 0,001,$$

d. h. am Anfange des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=1/2} = 100^\circ \text{ C. } d\vartheta \leq 0,07^\circ \text{ C.}$$

und am Ende des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=1/2} = 35^\circ \text{ C. } d\vartheta \leq 0,02^\circ \text{ C.}$$

Hingegen erhält man für die konstanten, durch Umrechnung der Mikrovolt in Celsiusgrade entstehenden Fehler:

$$d\vartheta \cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} - \frac{1}{\vartheta_{z=1/2}} \right\} \leq 0,001$$

oder

$$d\vartheta \cdot \frac{1}{2 \cdot \vartheta_{z=1/2}} \leq 0,001,$$

d. h. am Anfange des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=1/2} = 100^\circ \text{ C. } d\vartheta \leq 0,2^\circ \text{ C.}$$

und am Ende des Beobachtungssatzes:

$$\vartheta_{z=1/2} = 35^\circ \text{ C. } d\vartheta \leq 0,07^\circ \text{ C.}$$

Das einzige, was bei der Bestimmung des Kosinus unbequem ist, aber trotzdem nicht einmal bei einer rohen Bestimmung vermieden werden kann, ist die Interpolation der

zeitlich nacheinander beobachteten Temperaturen ($\vartheta_{s=z_1} + \vartheta_{s=z_2}$) und $\vartheta_{s=1/2}$ auf dieselbe Zeit.

Was schließlich die bei den Ringbeobachtungen erreichte Genauigkeit betrifft, so gilt für die β genau dasselbe wie beim Stabe. Zur Bestimmung der γ genügt es vollständig, den Durchmesser des Ringes bis auf 0,1 mm genau zu messen. Die theoretische Genauigkeitsgrenze ist hier ebenfalls $\frac{1}{2}$ Proz.

VI. Beobachtungsergebnisse und Bemerkungen zu denselben.

Die von mir untersuchten Materialien sind sämtlich dem Nachlasse Neumanns entnommen.¹⁾ Die Dimensionen der einzelnen Stäbe bez. Ringe erwiesen sich keineswegs als gleichgültig. Bei den Messungen mit zu großen Stäben oder Ringen waren die Temperaturerhöhungen an den Stellen $z = z_2$ bez. $z = 5.1/8$ zu klein gegenüber den Temperaturen an den Erwärmungsstellen, und es gewann die äußere Leitfähigkeit einen zu großen Einfluß. Waren hingegen die Dimensionen zu klein, so fand der Temperatenausgleich zu schnell statt, als daß eine genügende Anzahl von Beobachtungen gemacht werden konnte. Am zweckmäßigsten ergab sich für Ringe ein Durchmesser von 10—20 cm, für Stäbe eine Länge von etwa 20—50 cm, je nach der Leitfähigkeit des Materiales.

Die Resultate der einzelnen definitiven Messungen habe ich zahlenmäßig im Abschnitt VII der Dissertation angeführt. Hier begnüge ich mich daher in der Schlußtablelle die Mittelwerte zusammenzustellen.

Vergleicht man die von mir gefundenen Werte mit den Angaben Neumanns — obwohl ein solcher Vergleich aus den auf p. 939 angeführten Gründen nur wenig Zweck hat —, so sind meine Werte durchweg niedriger als die von Neumann angegebenen und stimmen somit besser mit den sich aus dem

1) Da in diesem weit mehr Stäbe als Ringe vorhanden sind, so hat Neumann bei seinen Untersuchungen wahrscheinlich trotz der komplizierteren Rechnung die Stäbe vor den Ringen bevorzugt, was wohl auch aus seinen Worten: „Dans quelques expériences j'ai aussi remplacé les barres par des anneaux“ (Ann. de chim. et phys. 66. p. 184. 1862) hervorgeht.

Zahlenmaterial der verschiedensten Beobachtungen ergebenden Mittelwerten¹⁾ überein. Am stärksten weichen Neumanns Werte für Kupfer von meinen Resultaten ab; andererseits ist aber gerade bei Kupfer eine merkwürdig gute Übereinstimmung meiner Werte mit den von Jaeger und Diesselhorst²⁾ gefundenen zu konstatieren.

Name	Neumann						Meine Mittelwerte für a^3 in g, cm und sec	Jaeger und Diesselhorst (nach ihren Angaben für die in Frage kommenden Temperaturen berechnet)
	k^3 in Pariser Linie und Minute	Spezifisches Gewicht ³⁾	Spezifische Wärme ⁴⁾	c^2 in Pariser Linie und Minute	a^2 in g, cm und sec			
Kupfer	1306	8,73	0,093	1609	1,364	1,12 ₀ bei 75° C.	1,09 bei 75° C.	
Messing	356	8,48	0,093	451	0,882	0,375 ₀ „ 75	—	
Zink	362	7,19	0,094	536	0,455	0,411 ₇ „ 50	0,398 bei 50° C.	
Neusilber	129	8,54	0,095	159	0,135	0,131 ₁ „ 80	—	
Eisen	193	7,74	0,11	227	0,192	0,181 ₅ „ 80	0,165 bei 80° C.	

Auf eine experimentelle Bestimmung des spezifischen Gewichtes und der spezifischen Wärme habe ich verzichtet, weil eine solche für den Zweck meiner Arbeit gleichgültig ist. Ich hatte mir die Aufgabe gestellt, theoretisch und experimentell zu prüfen, ob die Neumannsche Methode zu einer exakten Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit geeignet ist, und hierbei

1) Eine Zusammenstellung der einzelnen Zahlenwerte (stationärer Zustand — Wiedemann, Franz, Forbes, Tait, Mitchell, F. Kohlrausch, Chwolson, Quick, Child, Longhear, Berget, Stewart, Hall; nicht stationärer Zustand — F. Neumann, Ångström, H. Weber, Kirchhoff, Hansemann, Lorenz, H. F. Weber, Hågeström) findet sich in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 40. p. 45. 1896. Holborn und Wien.

2) Abhandlungen der Physik.-Techn. Reichsanstalt 3. p. 269—424. 1900. Jaeger u. Diesselhorst, Über Kohlrauschs Methode der elektrischen Heizung.

3) Der Tabelle in den Ann. de chim. et phys. (III) 66. p. 185. 1862 entnommen.

4) Den Tabellen in Kohlrauschs Praktischer Physik (9. Aufl. 1901) entnommen.

kommt einzig und allein die Bestimmung von a^2 in Betracht. Außerdem scheint es mir bei neuen Bestimmungen des Wärmeleitvermögens viel wertvoller zu sein, eine einfache und handliche Methode für Präzisionsmessungen weiter auszuarbeiten und insbesondere den Temperaturkoeffizienten für die verschiedenen Materialien genau zu bestimmen, als etwa für eine große Reihe einzelner Körper die innere Leitfähigkeit zahlenmäßig zu ermitteln. Das Leitvermögen hat ja bekanntlich nicht etwa für jede Metallsorte einen festen Wert, sondern ist für jeden einzelnen Körper einer und derselben Metallsorte — natürlich innerhalb gewisser Grenzen — verschieden¹⁾, was durch den großen Einfluß der geringsten chemischen Verunreinigung und einer verschiedenen mechanischen Behandlung — Härtegrad²⁾ — bedingt ist. Ferner sind Mittelwerte durch die vielen in der Literatur vorliegenden Bestimmungen bereits hinlänglich genau bekannt, so daß weitere Bestimmungen an einem Mittelwerte nur wenig ändern können. Der Temperaturkoeffizient hingegen ist vorläufig noch nicht einmal der Größenordnung nach sicher, und einfache handliche Methoden fehlen völlig. Die Neumannsche Methode dürfte von den bisherigen die einfachste sein.

Will man meine Werte zu einem Vergleiche mit den Resultaten anderer Beobachter verwenden, so genügt es vollständig, für Dichte und spezifische Wärme Werte aus Tabellen — etwa Landoldt und Börnstein oder Kohlrausch — zu entnehmen, da diese beiden Größen für die einzelnen Körper einer und derselben Metallsorte nur sehr wenig variieren. Ich füge daher noch folgende Schlußtabelle hinzu:

1) Aus diesem Grunde verzichte ich auf einen Vergleich mit den Werten anderer Beobachter und halte auch einen solchen mit den Werten Neumanns für unwichtig, obwohl ich sämtliche Materialien dem Nachlasse Neumanns entnommen habe. Diese Sammlung ist nämlich derartig reichhaltig, daß ich nur einen kleinen Teil derselben untersucht habe und mich daher zu einem Vergleiche meiner Werte mit denen Neumanns nicht berechtigt halte.

2) F. Kohlrausch (Wied. Ann. 33. p. 678. 1888) hat das Leitvermögen des weichen Stahles um etwa 80 Proz. größer als dasjenige des harten gefunden.

	$a^2 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$	Tempe- ratur in Celsius- graden	Tempe- ratur- koeffizient	Nach Kohlrausch ist		$k \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{sec}} \right]$
				Dichte	Spez. Wärme	
Stäbe:						
Eisen I	0,173 ₄	80°	0,0010	} 7,8	0,11	0,148 ₈
Eisen II	0,184 ₂	80	0,0008			0,158 ₈
Stahl	0,118 ₀	80	0,0007	7,8	0,12	0,110 ₄
Kupfer I	1,08 ₈	75	0,0004 ₈	} 8,7	0,093	0,879 ₈
Kupfer II	1,15 ₂	75	0,0004			0,931 ₇
Messing I	0,377 ₀	75	0,0008	} 8,4	0,093	0,295 ₂
Messing II	0,372 ₁	75	0,0010			0,290 ₇
Zink	0,425 ₂	50	0,0004 ₈	7,1	0,094	0,283 ₈
Neusilber	0,129 ₂	80	0,0005 ₈	8,5	0,095	0,104 ₂
Silber	1,69 ₀	80	0,0001 ₈	10,5	0,056	0,993 ₇
Blei	0,244 ₈	40	0,0002	11,3	0,031	0,0857
Zinn	0,378 ₄	35	0,0004	7,3	0,054	0,149 ₂
Ringe:						
Eisen I	0,189 ₈	80	0,0008 ₈	} 7,8	0,11	0,126 ₈
Eisen II	0,178 ₀	80	0,0007			0,153 ₈
Neusilber I	0,132 ₀	80	0,0010	} 8,5	0,095	0,107 ₁
Neusilber II	0,131 ₆	80	0,0010			0,106 ₂
Zink	0,393 ₂	50	0,0003	7,1	0,094	0,265 ₈

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. P. Volkmann im mathematisch-physikalischen Laboratorium der Universität Königsberg ausgeführt. Für die vielfache Unterstützung bei derselben spreche ich Hrn. Prof. Dr. Volkmann meinen wärmsten Dank aus.

Mariendorf bei Berlin, Oktober 1905.

(Eingegangen 20. Oktober 1905.)

3. *Über Astigmatismus, Koma und Aberration; von Allvar Gullstrand.*

(Hierzu Taf. VIII.)

Die Abweichungen von der Homozentrität in Strahlenbündeln, welche eine optische Abbildung vermitteln, werden einwandfrei aus den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche des betreffenden Strahlenbündels deduziert. Diese Methode bietet nicht nur dadurch Vorteile, daß die einfache geometrische Beziehung zwischen Fläche und Normalenbündel eine leicht anzuwendende strenge mathematische Kontrolle ermöglicht, sondern auch darin, daß das Wahre von dem nur annähernd Wahren leichter getrennt werden kann, indem anstatt einer Anzahl ihrer geometrischen Bedeutung nach unbekannten Koeffizienten in einer Potenzenreihe — die ja nur annäherungsweise die Wahrheit darstellen kann — geometrische Größen untersucht werden, welche an und für sich die volle Wahrheit aussagen. Will man für die Beurteilung der Abweichungen die Potenzenreihen entwickeln, so findet man die fraglichen geometrischen Größen in den jetzt ihrer Bedeutung nach bekannten Koeffizienten der Reihe wieder.

Ganz abgesehen davon, daß die Wissenschaft als solche die Kenntnis des — nur durch die Untersuchung der Wellenfläche zu ermittelnden — Wesens der Abweichungen fordern muß, glaube ich, daß die Würdigung der geometrischen Beziehungen auch praktischen Nutzen bringen kann, indem die Abschätzung des Gültigkeitsbereiches der gewonnenen Formeln erleichtert wird.

Die mathematische Bedeutung der Brechungsformeln ist eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen der Wellenflächen des einfallenden und gebrochenen Strahlenbündels und denjenigen der brechenden Fläche. Obwohl dieselben für die einfacheren Sonderfälle gewöhnlich ohne Bezugnahme auf die Wellenfläche hergeleitet werden, und obwohl dasselbe für ge-

wisse Abweichungen von der Homozentrizität der Fall ist, so ist einesteils eine erfolgreiche Erweiterung des zugänglichen Untersuchungsgebietes nur durch weitere Verfolgung der Beziehungen zwischen den drei Flächen zu erwarten, während andernteils auch diese Beziehungen einer strengen mathematischen Kontrolle leicht zugänglich sind.

Nur den Nachteil hat die flächentheoretische Methode, daß sie gewöhnlich nicht als so leicht zugänglich angesehen wird, weshalb auch in der geometrischen Optik der dritten Dimension meistens, so weit als möglich, durch Projektionen aus dem Wege gegangen wird. Es ist auch nicht meine Absicht hier eine Darstellung zu geben, welche etwa gründliche Kenntnisse von der Geometrie der Flächen voraussetzte, sondern ich werde, da der Gegenstand nicht ohne Betreten dieses Gebietes hinreichend erläutert werden kann, nur eine möglichst leichtfaßliche Darstellung der geometrischen Beziehungen zwischen Wellenfläche und Strahlenbündel in den einfachsten Fällen geben, wobei ich von mathematischen Beweisen nur das zum Verständnis der Koma bei endlichem Einfallswinkel sowie der sogenannten sphärischen Aberration auf der Achse Unumgängliche anführen werde, im übrigen aber auf frühere Publikationen verweise.

Wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, ist die Darstellung auf monochromatische Abweichungen beschränkt, die in einfach brechenden Medien entstanden sind.

Unter dieser Bedingung kann bekanntlich durch jeden Punkt eines beliebigen Strahles eine Fläche gelegt werden, zu welcher sämtliche Strahlen des durch Brechung oder Spiegelung von ursprünglich homozentrischem Licht entstandenen Strahlenbündels Normalen sind. Eine solche Fläche, welche eigentlich die einhüllende Fläche der Elementarwellenflächen darstellt, wird Wellenfrontfläche oder kurz Wellenfläche des Strahlenbündels genannt. Die Bedeutung der Untersuchung dieser Fläche liegt darin, daß eben dieselben Abweichungen von der Homozentrizität, welche in einem Normalenbündel möglich sind, und — unter der erwähnten Bedingung — keine anderen im Strahlenbündel vorkommen.

Die Untersuchungsmethode kann nur eine differentialgeometrische sein, da nur die Differentialquotienten der Wellen-

flächengleichung in einem bestimmten Punkte aus den Gesetzen der Brechung erhalten werden, die Gleichung selber aber unbekannt bleibt und nur annäherungsweise durch Reihenentwicklung dargestellt werden kann. Ebenso wie der untersuchte Punkt auf der Wellenfläche durch diese Differentialquotienten mathematisch charakterisiert ist, eben auf dieselbe Weise geben uns die aus den Differentialquotienten ermittelten geometrischen Größen mathematisch exakte Maße, welche den durch den betreffenden Punkt gehenden Strahl und dessen Beziehungen zu der nächsten Umgebung im Strahlenbündel charakterisieren. Diese Untersuchung eines Strahlenbündels in der Umgebung eines bestimmten Strahles, welche mit der Untersuchung einer Fläche in der Umgebung eines bestimmten Punktes zusammenfällt, liefert also mathematisch genaue Resultate. Sobald man aber die durch Reihenentwicklung gewonnene Flächengleichung oder die entsprechenden Gleichungen der Normale benutzt, hat man schon den Boden der strengen Wahrheit verlassen, und die Resultate müssen bei jedem Schritt besonders auf ihre Zuverlässigkeit geprüft werden.

Es wird also eine endliche Öffnung des Strahlenbündels vorausgesetzt und dasselbe zunächst längs einem ausgewählten Strahle, dem Hauptstrahl, untersucht. Wird die Untersuchung längs mehreren Strahlen ausgeführt, so gewinnt man eine um so ausgedehntere Kenntnis vom Strahlenbündel, je mehr Untersuchungen angestellt werden. Die exakte Kenntnis kann nur auf diese Weise gewonnen werden, und die Sache würde sich offenbar nicht anders verhalten, wenn die Gleichung der Wellenfläche bekannt wäre, da ja dieselbe nur auf diese Weise, d. h. durch Untersuchung verschiedener Flächenpunkte, angewendet werden könnte.

Astigmatismus.

In der Flächengleichung $z = f(xy)$ mögen die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, wie gebräuchlich mit p, q, r, s, t bezeichnet werden. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß derjenige Strahl, längs welchem das Strahlenbündel untersucht wird, mit der Z -Achse, die Haupttangente in dem entsprechenden Punkte der Wellenfläche mit der X - bez. Y -Achse zusammenfallen. Für diesen Punkt ist dann

$$x = y = z = p = q = s = t = 0$$

sowie

$$D, = \frac{1}{\varrho,} = r, \quad D,, = \frac{1}{\varrho,,} = t,$$

wenn mit $D, D,,$ die Hauptkrümmungen, mit $\varrho, \varrho,,$ die entsprechenden Krümmungshalbmesser im ersten bez. zweiten Hauptnormalschnitte bezeichnet werden, und derjenige Hauptnormalschnitt, welcher mit der XZ -Ebene zusammenfällt, der erste genannt wird.

Die allgemeinen Gleichungen der Flächennormale

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0 \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

geben, differenziert, für den fraglichen Punkt, d. h. nach Einsetzen von $z = p = q = s = 0$:

$$d\xi = dx(1 - \zeta r), \quad d\eta = dy(1 - \zeta t).$$

Geht man auf der Fläche zu einem unendlich nahe gelegenen Punkt über, so entspricht diesem Punkte ein dem untersuchten Strahle unendlich nahe verlaufender anderer Strahl, dessen Beziehungen zum ersten diese Gleichungen angeben. Um zu erfahren, ob der untersuchte Strahl von anderen unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, und in welchen Punkten, setzt man $d\xi = d\eta = 0$, woraus sich ergibt

$$\text{entweder } \zeta = \varrho,, \quad dy = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta = \varrho,, \quad dx = 0,$$

wofür nicht $\varrho, = \varrho,,$ ist. Dies besagt, daß ein Strahl nur in den Krümmungsmittelpunkten der Wellenfläche, den *Fokalkpunkten* des Strahlenbündels, von nächstliegenden Strahlen geschnitten werden kann, sowie daß die Ebene, welche zwei sich schneidende, einander unendlich nahe verlaufende Strahlen enthält, mit einem Hauptnormalschnitte der Wellenfläche zusammenfällt, den Fall $\varrho, = \varrho,,$ ausgeschlossen. Daß der Strahl wirklich von nächstliegenden Strahlen geschnitten wird, beweisen erst sukzessive Differentiationen, die ich an anderer Stelle¹⁾ ausgeführt habe.

Ein Strahl kann also entweder in zwei oder aber nur in einem Punkte von anderen ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen desselben, ursprünglich homozentrisch gewesenen Strahlenbündels geschnitten werden. Im ersteren Falle ist das Strahlenbündel längs dem betreffenden Strahle astigmatisch,

1) Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophtalmologie, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III 1900. Separat im Buchhandel zugänglich. p. 45.

und der Grad des Astigmatismus wird — vom Brechungsindex des betreffenden Mediums abgesehen — durch die Differenz der Hauptkrümmungen der Wellenfläche $D_1 - D_2$ gemessen, falls das Strahlenbündel auf eine solche bezogen wird. Dies ist bei Übergang von einem Medium zum anderen der Fall, aber nicht bei Übergang von einer brechenden Fläche zur anderen in einem und demselben Medium. Hierbei wird der Astigmatismus durch die Brennweite $q_1 - q_2$ gemessen, die mit E bezeichnet werden mag.

Von der allgemeinen Konstitution des astigmatischen Strahlenbündels haben wir nur erfahren, daß die beiden Ebenen, *Hauptschnitte des Strahlenbündels*, die einen beliebigen Strahl und die ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen enthalten, welche ihn schneiden, aufeinander senkrecht stehen und mit den Hauptnormalebene der Wellenfläche zusammenfallen. Ohne den Boden des exakten Wissens zu verlassen, erfahren wir auf dieser Stufe der Untersuchung auch nicht mehr davon.

Wird eine Reihenentwicklung nach Potenzen von x und y vorgenommen, wobei die Flächengleichung

$$z = \frac{x^2}{2q_1} + \frac{y^2}{2q_2} + \dots$$

und die Normalengleichungen

$$\xi = x \left(1 - \frac{z}{q_1} \right) + \dots, \quad \eta = y \left(1 - \frac{z}{q_2} \right) + \dots$$

erhalten werden, so ist auch damit kein Schade geschehen, solange keine weiteren Schlüsse daraus gezogen werden. Wenn aber aus dem Umstande, daß die so erhaltene Flächengleichung ein Paraboloid darstellt, der Schluß gezogen wird, daß das oskulierende Paraboloid ein besseres Bild des allgemeinen Flächenelementes gäbe als irgend ein anderes oskulierendes Flächenstück, so ist das ebenso falsch, wie die allgemein verbreitete Ansicht, daß das aus den so erhaltenen Normalengleichungen hergeleitete Sturmsche Konoid besser als irgend ein anderes beliebiges, der Tatsache der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte nicht widersprechendes Modell die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels darstelle. Im allgemeinen Strahlenbündel variieren sowohl die Fokalabstände wie die Hauptschnitte von Strahl zu Strahl,

und die Typen dieser Variationen können erst durch sukzessive Differentiationen ermittelt werden. Ein Modell, das die *allgemeine* Konstitution des Strahlenbündels darstellen soll, kann nicht mehr als vier Strahlen enthalten, von welchen je zwei in einem der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte symmetrisch zu der Schnittlinie dieser beiden Ebenen miteinander verlaufen, da es weiter nichts Allgemeingültiges in der Konstitution des unendlich dünnen Strahlenbündels gibt. Wird ein einziger Strahl mehr hinzugefügt, so ist, wie unten weiter dargelegt werden soll, schon etwas vom speziellen Typus ausgesagt. Es ist leicht einzusehen, daß dies auch für den Fall gilt, daß ein Strahl in einem der beiden Hauptschnitte zugefügt wird, indem derselbe entweder durch den Schnittpunkt der beiden anderen gehen muß oder nicht, wodurch ausgesagt wird, ob der betreffende Fokalabstand längs dem Hauptstrahl ein Maximum bez. Minimum hat oder nicht. Der Ausdruck, daß der Hauptstrahl im Fokalepunkte von nächstliegenden oder ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, darf nämlich nicht mehr bedeuten, als daß dieser Punkt die Limeslage des Schnittpunktes darstellt, welche erst in dem Augenblicke erreicht wird, wo die sich schneidenden Strahlen in einem zusammenfallen.

Da das Konoid von Sturm also nicht die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels angibt, sondern einen bestimmten Typus bezeichnet, so ist es von Interesse zu erfahren, ob dieser Typus auch den allgemeinsten Fall darstelle. Ich schicke von den Resultaten der nächsten Stufe der Rechnung, der Untersuchung der Koma, voraus, daß es nur den speziellsten, durch zwei Symmetrieebenen charakterisierten Haupttypus darstellen könnte. Endlich beantworte ich auch im voraus die Frage, ob das Konoid überhaupt einen mathematisch möglichen Typus des Strahlenbündels darstelle. Das ist bei einfach brechenden Medien und ursprünglich homozentrischem Lichte nicht der Fall, da ein Flächennormalenbündel mit zwei geraden Brennlinien nicht existiert.

Der Umstand, daß vom Sturmschen Konoid als Repräsentanten für die Konstitution eines dünnen Strahlenbündels nur das wirklich wahr ist, was aus den Eigenschaften des allgemeinen Flächenpunktes direkt hervorgeht, dürfte den Vorteil

der Kenntnis von den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche für die Untersuchung der im Strahlenbündel vorkommenden Abweichungen von der Homozentrizität beweisen. Es ist zwar gestattet, ein Flächenstück, dessen Breite ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung darstellt, wenn die Länge unendlich klein von der ersten Ordnung ist, als eine unendlich kurze Linie zu betrachten, und es ist wahr, daß jedes Strahlenbündel zwei aufeinander und auf den Hauptstrahl senkrechte solche Querschnitte hat — aber nur wenn es unendlich dünn ist, d. h. bei stetig sich verengernder Blende erst in dem Augenblicke, wo es verschwindet.

Praktische Versuche lehren auch, daß das Konoid, wenn es sich um reelle Strahlenbündel handelt, nur den Typus mit zwei Symmetrieebenen einigermaßen repräsentieren kann.

Will man die Abweichung von der Homozentrizität im Strahlenbündel durch Entwickeln nach Potenzen der Öffnungswinkel ausdrücken, so kann man schon auf diese Stufe eine longitudinale und eine laterale Abweichung definieren. Wenn nämlich einer der Fokalkpunkte als das Zentrum angesehen wird, von welchem aus man die Abweichung rechnet, so kann der Abstand des Schnittpunktes des in einem Hauptschnitte verlaufenden Strahles mit dem anderen Hauptschnitte vom gewählten Zentrum als die longitudinale Abweichung dieses Strahles, der Abstand des Schnittpunktes mit der im gewählten Zentrum senkrecht zum Hauptstrahl gelegten Ebene vom selben Zentrum als die laterale Abweichung bezeichnet werden. Wenn die Öffnungswinkel w, w_1 , auf dieser Stufe der Rechnung und im gewählten Koordinatensystem durch die Beziehungen

$$dw = D, dx, \quad dw_1 = D_1, dy$$

definiert werden, so erhält man, falls z. B. der erste Fokalkpunkt als Zentrum gewählt wird, für die longitudinale Abweichung den Wert E , für die laterale: $w_1 \cdot E$. Obwohl nun diese Bezeichnung nicht üblich ist, führe ich die Werte deshalb an, weil man aus denselben schon auf dieser Stufe der Rechnung das allgemeingültige Gesetz ablesen kann, daß aus den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der Flächengleichung, die unendlich kleinen Größen der Ordnung $n - 1$ in der lateralen, der Ord-

nung $n - 2$ in der longitudinalen Abweichung eines Strahlen von der Homozentrität erhalten werden.

Ist die Brennstrecke von derselben Größenordnung wie die Öffnung des Strahlenbündels, so gehorcht dasselbe den Gesetzen des Astigmatismus nicht mehr. Diese Fälle gehören in dieselbe Kategorie wie die nicht astigmatischen Strahlenbündel, von welchen auf dieser Stufe der Rechnung nur der Fokalkpunkt bekannt ist, indem erst weitere Differentiationen lehren, von welchen nächstliegenden Strahlen ein Strahl geschnitten wird, längs welchem das Strahlenbündel ohne Astigmatismus — *anastigmatisch* — ist.

Was die Terminologie betrifft, so habe ich den Astigmatismus als Eigenschaft des Strahlenbündels längs einem ausgewählten Strahle bezeichnet, was immer gemeint wird, wenn kurz vom Astigmatismus eines Strahlenbündels gesprochen wird. Unter Astigmatismus eines optischen Instrumentes wird leider Verschiedenes verstanden. In der medizinischen Optik, wo Instrumente vorkommen, in welchen das axiale Strahlenbündel längs der Achse astigmatisch ist — astigmatische Augen, sphärozyindrische bez. torische Brillen — wird diese Eigenschaft gemeint. In der Literatur der konstruktiven Optik dagegen versteht man darunter den Astigmatismus eines schief einfallenden Strahlenbündels, oft auch nur den eines Strahlenbündels mit unendlich kleiner Neigung gegen die Achse, in welchem letzteren Falle der Astigmatismus des Instrumentes durch die Krümmungsdifferenz der beiden Bildflächen im Schnittpunkte mit der Achse gemessen wird. Ich kann nicht umhin, der Meinung Ausdruck zu geben, daß erstere Terminologie wissenschaftlich richtig, letztere recht unglücklich ist.

Die Formeln für die Berechnung des Astigmatismus im gebrochenen Strahlenbündel, wenn das einfallende Strahlenbündel und die brechende Fläche bekannt sind, hat schon Hamilton¹⁾ implizite gegeben, wonach dieselben von Sturm²⁾ in leicht verständlicher Form entwickelt wurden. Man erhält sie, wie solche höherer Ordnung, durch Differentiation des

1) W. R. Hamilton, Theory of Systems of rays. Suppl. Trans. Roy. Irish Acad. 16. T. 1. 1830. p. 19. Lit. V.

2) Ch. Sturm, Mémoire sur l'optique. Journal de Math. pures et appliquées. 1838.

analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen. Allgemein erhält man aus den Differentialquotienten einer beliebigen Ordnung im Schnittpunkte der Wellenfläche des einfallenden Bündels mit einem bestimmten Strahle und den Differentialquotienten derselben Ordnung in der Gleichung der brechenden Fläche für den Schnittpunkt mit dieser die exakten Werte der entsprechenden Differentialquotienten für den Schnittpunkt des gebrochenen Strahles mit der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels. Für die Spezialfälle, wo ein Hauptschnitt des einfallenden Strahlenbündels und ein Hauptnormalschnitt der brechenden Fläche mit der Brechungsebene zusammenfällt, werden die entsprechenden einfacheren Formeln gewöhnlich ohne Rücksichtnahme auf die Wellenfläche entwickelt.

Koma.

Durch die Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung erhält man die von der zweiten Potenz der Öffnungswinkel abhängigen lateralen Abweichungen von der Homozentrität, die Komafehler. Zunächst hat man dabei die geometrische Bedeutung dieser Differentialquotienten zu ermitteln.

Werden die allgemeinen Gleichungen für die Hauptkrümmungen der Flächen differenziert, dann $p = q = s = 0$ gesetzt, so erhält man für das gewählte Koordinatensystem:

$$dD, = dr, \quad dD,, = dt.$$

Werden nun allgemein die Bogenelemente der Hauptkrümmungslinien der Fläche mit $ds, ds,,$ bezeichnet, so ergeben sich für das fragliche Koordinatensystem, in welchem $ds, = dx$ und $ds,, = dy$ ist, die einfachen Beziehungen:

$$\frac{dD,}{ds,} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}, \quad \frac{dD,}{ds,,} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{dD,,}{ds,} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{dD,,}{ds,,} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}$$

durch welche einerseits aus einer beliebigen Flächengleichung die vom Koordinatensystem unabhängigen geometrischen Größen $dD, / ds, \dots$ für einen beliebigen Punkt erhalten werden, andererseits aber auch, wenn diese bekannt sind, die Flächengleichung bis einschließlich der dritten Potenz von x und y entwickelt werden oder, was damit gleichbedeutend ist, die Gleichung

einer Fläche gewonnen werden kann, welche im fraglichen Punkt eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit der Wellenfläche hat. Wir wissen hiermit, daß von Komafehlern das, und nur das, wahr ist, was aus diesen geometrischen Größen direkt abgeleitet werden kann: wird nach anderer Methode weniger gefunden, so hat die Methode nicht die volle Wahrheit gegeben, und was mehr gefunden wird, ist entweder falsch oder nur annähernd wahr.

Da die vier Größen die Variation der Hauptkrümmungen längs den beiden Hauptkrümmungslinien beim Durchgang durch den fraglichen Punkt bezeichnen, so zeigt der erste Blick, daß je zwei von ihnen verschwinden, je nachdem das Strahlenbündel um die eine oder andere Hauptnormalebene symmetrisch ist. Es empfiehlt sich schon deshalb, aber auch aus praktischen Gründen, je nachdem zwei Symmetrieebenen, nur eine oder gar keine vorhanden ist, drei Haupttypen der möglichen Strahlenbündel zu unterscheiden, welche als symmetrische Strahlenbündel, bez. Strahlenbündel mit einfacher, mit doppelter Asymmetrie bezeichnet werden.

Für die sogenannten Komafehler in zentrierten optischen Instrumenten braucht man also nur den Typus mit einfacher Asymmetrie zu berücksichtigen, indem bei schiefe Einfall das Strahlenbündel längs der Achse des Instrumentes schneidenden Strahle untersucht wird.

Wenn derjenige Hauptschnitt des Strahlenbündels, welcher mit der Symmetrieebene zusammenfällt, als der erste bezeichnet wird, so sind also nur die beiden Größen dD_1/ds , und dD_2/ds , von Null verschieden. Ich bezeichne sie der Kürze halber mit U bez. W und nenne sie die *direkte* bez. die *transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten Hauptkrümmungslinie* im fraglichen Punkt. Die beiden Werte, welche gleich Null sind, werden also die direkte bez. die transversale Krümmungsasymmetrie längs der zweiten Hauptkrümmungslinie genannt.

So wie die Hauptkrümmungen von Punkt zu Punkt auf der Wellenfläche variieren, so entsprechen jedem Punkte auf dieser Fläche zwei Krümmungsmittelpunkte, und die verschiedenen Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen zwei Flächen oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt, eine Fläche, die Krümmungsmittelpunktsfläche oder Evolute, mit zwei ge-

sonderten Schalen, welche nur in einzelnen ausgezeichneten Punkten sich berühren. Diejenige Schale, welche den ersten Krümmungsmittelpunkt, den Schnittpunkt des Hauptstrahles mit den ihm im ersten Hauptschnitt nächstliegenden Strahlen enthält, nenne ich die erste.

Für die Richtungskosinus $\alpha \beta \gamma$ einer beliebigen Flächennormale gilt allgemein

$$\alpha = -\frac{p}{N}, \quad \beta = -\frac{q}{N}, \quad \gamma = \frac{1}{N},$$

wo

$$N^2 = 1 + p^2 + q^2$$

gesetzt ist. Werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Wellenfläche mit xyz , die des entsprechenden ersten Krümmungsmittelpunktes mit $\xi \eta \zeta$ bezeichnet, so ergibt die Projektion des ersten Krümmungshalbmessers ϱ , auf die drei Koordinatenachsen:

$$N(\xi - x) = -p\varrho, \quad N(\eta - y) = -q\varrho, \quad N(\zeta - z) = \varrho.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt für das gewählte Koordinatensystem, in welchem $p = q = s = 0$, mithin auch $dN = 0$ ist:

$$d\xi = dx - \varrho, dp = 0, \quad d\eta = dy - \varrho, dq = \frac{D, - D''}{D,} dy,$$

$$d\zeta = d\varrho = -\frac{U}{D,} dx,$$

$$d^2\xi = d^2x - \varrho, d^2p = 2d\varrho, dp = \frac{U}{D,} dx^2 - \frac{W}{D,} dy^2.$$

Man kann nun η und ζ als unabhängige Variablen betrachten, ξ als abhängige, wobei für die Differentialquotienten der Gleichung $\xi = f(\eta \zeta)$ der ersten Evolutenschale im ersten Krümmungsmittelpunkt folgende Werte resultieren

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta \partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} = -\frac{D, W}{(D, - D'')^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} = \frac{D,^3}{U},$$

aus welchen direkt hervorgeht, daß die Hauptnormalebenen der ersten Evolutenschale mit der Symmetrieebene bez. der ersten Fokalebene des Strahlenbündels, d. h. der im ersten Fokalfunkt senkrecht den Hauptstrahl schneidenden Ebene

zusammenfallen, und für den Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit erstgenannter Ebene der Wert

$$R = \frac{U}{D_1^3}$$

erhalten wird, während die Krümmung der Schnittlinie der Schale mit der Fokalebene den Wert $-D_1 W / (D_1 - D_2)^2$ hat.

Erstgenannter Krümmungsradius dient als Maß der *direkten Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt*. Man erhält ihn mittels obiger Formel unmittelbar aus dem entsprechenden Asymmetrienwerte der Wellenfläche und umgekehrt. Er wird, wie alle Krümmungen, positiv gerechnet, wenn die konkave Seite der betreffenden Linie der positiven Richtung der betreffenden Koordinatenachse zugekehrt ist. Wie ersichtlich, ist die Schale konkavkonvex, wenn die beiden Asymmetrienwerte der Wellenfläche, wie in optischen Instrumenten meistens der Fall ist, dasselbe Vorzeichen haben. Je größer dabei diese Asymmetrienwerte sind, um so größer wird der Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit der Symmetrieebene, um so kleiner der Radius der Schnittlinie mit der Fokalebene, um so mehr geht also die Gestalt der Schale von einer sattelähnlichen in eine rinnenförmige über, was Anlaß zu der Bezeichnung „Rinnenfehler“ gegeben hat, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Von der zweiten Evolutenschale wissen wir im voraus, daß sie im ersten Hauptschnitt des Strahlenbündels eine Kante haben muß, denn sonst wäre dieser Hauptschnitt keine Symmetrieebene. Um die Richtung der Kantlinie zu finden, differenzieren wir die Gleichungen für die zweite Schale

$$N(\xi - x) = -p \varrho_2, \quad N(\zeta - z) = \varrho_2$$

und erhalten

$$d\xi = -\frac{D_1 - D_2}{D_2} dx, \quad d\zeta = -\frac{W}{D_2^3} dx,$$

d. h. für den Winkel ϑ , den die Tangente der Kantlinie mit der zweiten Fokalebene bildet

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{W}{D_2(D_1 - D_2)},$$

wobei die positive Richtung dieses Winkels durch die Beziehung $\operatorname{tg} \vartheta = -d\zeta/d\xi$ definiert ist. Wird im zweiten Fokal-

punkt die Normale zur Kantlinie in der Symmetrieebene gezogen und verlängert, bis sie die erste Fokalebene trifft, so findet man für den längs der Normale der ersten Schale gemessenen Abstand des Schnittpunktes vom ersten Krümmungsmittelpunkt den Wert

$$S = -E \operatorname{tg} \vartheta = \frac{W}{D, D_{\text{„}}^2},$$

der als Maß der transversalen Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt dient. Wie ersichtlich, entspricht einem positiven Werte von S die Bedingung $\xi > 0$ für den fraglichen Schnittpunkt.

Durch die beiden Asymmetrienwerte R und S ist das Strahlenbündel bezüglich Komafehler vollständig charakterisiert. Dieselben sind von der Lage der Wellenfläche unabhängig, werden aber durch die ermittelten Beziehungen unmittelbar aus den entsprechenden Differentialquotienten der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche erhalten und geben andererseits unmittelbar durch dieselben Beziehungen die Differentialquotienten dritter Ordnung einer beliebigen Wellenfläche.

Ebenso wie die Fokalabstände von Strahl zu Strahl variieren, ist das auch mit den Asymmetrienwerten der Fall. Wenn kurz von den Asymmetrienwerten eines Strahlenbündels gesprochen wird, so wird also nur die Asymmetrienwerte längs dem fraglichen Strahle gemeint.

Um die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrität mittels dieser Werte nach Potenzen von den Öffnungswinkeln $w, w_{\text{„}}$ entwickeln zu können, müssen wir zunächst diese näher definieren. Am einfachsten tun wir dies, indem wir damit die Winkel bezeichnen, welche die Projektionen des Strahles auf den beiden Hauptnormalebenen mit dem Hauptstrahl bilden. Hierbei gelten für $p = q = s = 0$ folgende Beziehungen:

$$dw = dp, \quad d^2 w = d^2 p, \quad dw_{\text{„}} = dq, \quad d^2 w_{\text{„}} = d^2 q,$$

durch welche auch die Vorzeichen in Übereinstimmung mit der vorläufigen, p. 947 gegebenen Definition bestimmt sind. Eine kurze Überlegung lehrt, daß diese Beziehungen auch für die Definition der Öffnungswinkel als der Winkel zwischen dem

Strahle und den beiden Hauptschnitten gültig sind, da die Ausdrücke für diese Definition

$$w, = -\arcsin \alpha, \quad w,, = -\arcsin \beta$$

auch zu denselben führen.

Durch die unmittelbar herzuleitenden Beziehungen

$$R = -\frac{d q,}{d w,}, \quad S = -\frac{d q,,}{d w,},$$

tritt die analoge Bedeutung der Asymmetrienwerte des ohne Zusammenhang mit einer Wellenfläche untersuchten Strahlenbündels und der Krümmungsasymmetrien der Wellenfläche zutage.

Um nicht zu viele Ausdrücke für die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrizität im astigmatischen Strahlenbündel zu erhalten, empfiehlt es sich, die lateralen Abweichungen in den beiden Fokalebene so zu messen, daß in der ersten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom zweiten Hauptschnitt berücksichtigt, in der zweiten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom ersten Hauptschnitt gemessen wird. Die lateralen Abweichungen eines Strahles sind dann die Abweichungen vom Typus des Konoides von Sturm. Die auf diese Weise in der ersten Fokalebene gemessene Abweichung nenne ich *die erste laterale*, die andere die *zweite laterale*. Die entsprechenden longitudinalen Abweichungen lassen sich nur unter Berücksichtigung der abwickelbaren Normalflächen definieren, können aber auch bei der Untersuchung der Komafehler entbehrt werden, weshalb ich sie hier übergehe, um die Darstellung nur mit dem notwendigen Minimum von der Flächentheorie zu belasten.

Wir haben also die Gleichungen der Normale noch einmal zu differenzieren, wobei $\xi \eta$ als Funktionen von $w, w,,$ zu behandeln, mithin zunächst xy als Funktionen von $p q$ darzustellen sind. Aus den Beziehungen

$$d^2 p = U dx^2 + W dy^2 + D, d^2 x, \quad d^2 q = 2 W dx dy + D,, d^2 y$$

erhalten wir

$$d^2 x = -R dp^2 - S dq^2 + q, d^2 p, \quad d^2 y = -2 S dp dq + q,, d^2 q,$$

und aus den Normalengleichungen durch zweimalige Differentiation

$$d^2 \xi = d^2 x - \zeta d^2 p, \quad d^2 \eta = d^2 y - \zeta d^2 q,$$

mithin, indem wir für die erste laterale Abweichung in der ersten Gleichung $\zeta = \rho$, für die zweite laterale Abweichung in der zweiten $\zeta = \rho$, setzen, die Werte:

$$\text{Erste laterale Abweichung: } \xi = -\frac{w^2}{2} R - \frac{w'^2}{2} S.$$

$$\text{Zweite laterale Abweichung: } \eta = -w, w', S.$$

Andere Komafehler als diese gibt es nicht, wofern man darunter Abweichungen versteht, welche der zweiten Potenz der Öffnungswinkel proportional sind. Wie ersichtlich, würde man den gleichen Ausdruck für diese Abweichungen erhalten, wenn dieselben in einer beliebigen zum Hauptstrahl senkrechten Ebene gemessen würden, da $d^2 p = d^2 w$, $d^2 q = d^2 w'$ ist, und w, w' , unabhängige Variablen sind. Es würde aber dabei ein Glied erster Ordnung hinzukommen, während die angegebenen Werte für die erste bez. zweite laterale Abweichung die totale Abweichung bis einschließlich der Ordnung der Komafehler darstellen, indem das Glied erster Ordnung verschwindet. Dazu kommt noch, daß auf der Stufe der Aberrationen nur auf diese Weise einfache Werte erhalten werden können, und eine gleichmäßige Behandlung der Abweichungen verschiedener Ordnung immer ein Vorteil ist.

Diese Darstellung der Komafehler habe ich, um dieselbe zugänglicher zu machen, nicht nur in der Weise beschränkt, daß ich nur auf Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie Rücksicht genommen habe, sondern auch dadurch, daß nur diejenigen aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung zu ermittelnden geometrischen, das Strahlenbündel charakterisierenden Größen hergeleitet wurden, die für das Verständnis des Wesens der Abweichungen unumgänglich sind. Die vollständige Untersuchung einschließlich der Aberrationen, d. h. unter Berücksichtigung sämtlicher Differentialquotienten bis einschließlich der vierten Ordnung in der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche, findet man in der schon zitierten Arbeit. Die vollständige Untersuchung der Asym-

metrienwerte findet sich mit geringerem mathematischen Apparat in einer älteren Publikation.¹⁾ Zwar findet man weder auf der einen noch auf der anderen Stelle den Namen Koma, weil dieser Name einen Spezialfall bezeichnet, und die Untersuchungen allgemeingültig sind. In letztgenannter Arbeit sind allgemeingültige Formeln entwickelt, welche für ein beliebiges einfallendes Strahlenbündel nach Brechung in einer beliebigen Fläche — unter Berücksichtigung der Differentialquotienten dritter Ordnung auch in der Gleichung dieser — die Asymmetrienwerte des gebrochenen Strahlenbündels geben. Die einfacheren Formeln, welche beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gelten, sind dort auch mit den einfachsten Mitteln entwickelt.

Mit diesen Formeln habe ich die Asymmetrienwerte bei schiefem Durchgang durch Linsen berechnet und durch Versuche kontrolliert, Versuche, welche bewiesen haben, daß für praktisch vorkommende Öffnungen die Berücksichtigung der Asymmetrien genügt, um die verschiedenen Typen von Strahlenbündeln zu charakterisieren, so daß also die Definition einer Brennnlinie als eines Strahlenbündelquerschnittes, dessen Breite unendlich klein von dritter Ordnung ist, wenn die Länge ein Unendlichkleines erster Ordnung darstellt, hinreichend genau ist, um bei den vorkommenden Öffnungen auch diese Brennnlinie auf einen entsprechend schief gehaltenen Schirm auffangen zu können.

Die oben gegebene Darstellung der Asymmetrien geht davon aus, daß die Brennweite endlich ist. Doch ist es ersichtlich, daß die in den Werten der lateralen Abweichungen auftretenden Größen R und S unabhängig von der Größe der Brennweite aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Wellenflächengleichung erhalten werden. In der Tat sind dieselben auch im anastigmatischen Strahlenbündel gültig. Die Untersuchung dieser Strahlenbündel erforderte eine Durchforschung der Kreispunkte der Flächen, welche mir vollständig erst in der zitierten späteren Arbeit gelang, wo ich das für die fragliche Aufgabe Notwendige angeführt habe.²⁾

1) A. Gullstrand, Skand. Arch. f. Physiologie 2. p. 269. 1890.

2) Vgl. auch A. Gullstrand, Acta Mathematica 29. p. 59. 1904.

Von anderen Darstellungen der Komafehler bei endlicher Neigung des Strahlenbündels gegen die Achse eines zentrierten optischen Instrumentes kenne ich nur diejenige von Czapski¹⁾, welcher darunter nur die direkte Asymmetrie in der Symmetrieebene des Strahlenbündels versteht, und diejenige von König und v. Rohr²⁾, welche *drei* Komafehler beschreiben. Der erste wird Koma im engeren Sinne oder, wie auch bei Czapski, Unsymmetrie in tangentialen Büscheln erweiterter Öffnung genannt und entspricht vollkommen, wie auch die Benennung angibt, der direkten Asymmetrie. Der Zusammenhang mit dem Evolutenradius wird hier aus Versehen so angegeben, daß der *halbe* Asymmetrienwert gleich dem Radius gesetzt wird.³⁾ Der zweite Komafehler wird Rinnenfehler genannt und als die tangentielle Abweichung in sagittalen Büscheln erweiterter Öffnung definiert. Da die Tangentialebene die Symmetrieebene darstellt, so entspricht dieser Definition der transversale Asymmetrienwert. Die Rechnung, welche das von der zweiten Potenz des sagittalen Öffnungswinkels abhängige Glied in dem Wert für den Abstand des Schnittpunktes eines windschiefen Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene zu ermitteln bezweckt, wird für Strahlenbündel endlicher Neigung nicht zu Ende geführt. Wäre das der Fall, so hätte sie den transversalen Asymmetrienwert ergeben müssen, da der Definition nach das gesuchte Glied eben das Glied $-(w_{\perp}^2/2)S$ im Werte für die erste laterale Abweichung ist.

Will man dieses Resultat durch die von den Verfassern bezweckte Rechnung erhalten, so hat man nur, um den Schnittpunkt eines beliebigen Strahles mit der Tangentialebene zu finden, in der Normalgleichung

$$\eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

1) S. Czapski, Grundsüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl. p. 144. 1904. Auch schon in der ersten Auflage von Winkelmanns Handb. d. Phys. 2. Abt. 1. p. 130 ff.

2) M. v. Rohr, Die Theorie der optischen Instrumente I. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik p. 265 ff. 1904.

3) Bei S. Czapski l. c. findet man den entgegengesetzten Druck fehler, doch nur in der zweiten Auflage.

$d\eta = d^2\eta = 0$ zu setzen, wonach durch zwei Differentiationen erhalten wird:

$$dy(1 - \zeta t) = 0, \quad d^2y - \zeta d^2q - 2 dq d\zeta = 0,$$

welche Werte, wenn die Öffnungswinkel als unabhängige Variablen angesehen werden, unter Anwendung des bei der Ermittlung der lateralen Abweichungen gefundenen Wertes für d^2y die Beziehungen

$$\zeta = q'', \quad d\zeta = -S dp$$

ergeben, aus welchen mittels des dortselbst angegebenen Wertes für d^2x durch zweimalige Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

resultiert:

$$d\xi = dx(1 - \zeta r) = -E dp,$$

$$d^2\xi = d^2x - 2 d\zeta dp = -(R - 2S) dp^2 - S dq^2,$$

d. h. für den gesuchten Abstand des Schnittpunktes eines Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene

$$\xi = -w, E - \frac{w^2}{2}(R - 2S) - \frac{w^2}{2}S,$$

wo das letzte Glied also nach der gegebenen Definition den Rinnenfehler bezeichnet und durch die bezweckte Rechnung erhalten ist.

Der Umstand, daß das zweite Glied hier nicht mit dem ersten Gliede im Werte für die erste laterale Abweichung übereinstimmt, steht nur scheinbar damit in Widerspruch, daß die laterale Abweichung, soweit sie von den zweiten Potenzen der Öffnungswinkel abhängig ist, für jede beliebige Ebene, mit welcher der Hauptstrahl senkrecht geschnitten wird, unveränderlich bleibt, denn die Ebene, mit welcher der Hauptstrahl hier geschnitten wurde, steht nicht senkrecht auf denselben, oder, wie man es auch ausdrücken kann, die Lage der den Hauptstrahl senkrecht schneidenden Ebene ist von der ersten Potenz des Öffnungswinkels w , abhängig.

Der dritte von den beschriebenen Komafehlern wird Dreiecksfehler oder die tangentielle Differenz der sagittalen Schnittweiten genannt. Letztere Benennung entspricht der transversalen Asymmetrie, und die Rechnung führt auch zu

dem oben ermittelten Werte für die zweite laterale Abweichung. Zum Namen Dreiecksfehler kann daran erinnert werden, daß die Dreiecksform der Strahlenbündelquerschnitte, wie meine oben zitierten Versuche auch praktisch darlegen, dann am ausgeprägtesten ist, wenn eben die transversale Asymmetrie gleich Null ist, indem dabei, wie die angegebenen Werte für die Krümmungen der ersten Evolutenschale lehren, die eine Seite des Dreiecks bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gerade wird.

Die Untersuchung der Komafehler wird von den Verfassern in Zusammenhang mit der Entwicklung von Formeln für die Berechnung derselben im gebrochenen Strahlenbündel ausgeführt. Von diesen Formeln stimmen diejenigen für den Komafehler im engeren Sinne und für den sogenannten Dreiecksfehler nach entsprechender Umformung mit den meinigen überein und führen auch in erster Linie zu zwei, von den Verfassern mit $d\tau/du$ bez. $d\zeta/du$ bezeichneten Werten, welche, vom Vorzeichen abgesehen, mit den Asymmetriewerten des gebrochenen Strahlenbündels identisch sind.

In einer eben erschienenen Arbeit behandelt Gleichen¹⁾ unter dem Begriffe Koma nur die direkte Asymmetrie und sagt von den Resultaten der Untersuchung, durch welche das Wesen der Komafehler ermittelt und die Berechnung derselben für das gebrochene Strahlenbündel durchgeführt wurde, daß sie für die photographische Optik zurzeit noch keine Verwendbarkeit beanspruchen können.²⁾ Daß der Name Koma in der erwähnten Untersuchung nicht vorkommt, dürfte doch vielleicht dieses Urteil mit veranlaßt haben.

Beschränkt man sich bei der Darstellung der Komafehler auf den Fall eines unendlich wenig gegen die Achse eines zentrierten Instrumentes geneigten Strahlenbündels, so braucht man nur auf die direkte Asymmetrie Rücksicht zu nehmen, weil dann die Erfüllung einer Bedingungsgleichung genügt, um beide Asymmetriewerte gleich Null zu machen.

1) A. Gleichen, Vorlesungen über photographische Optik, p. 136 ff. Leipzig 1905.

2) l. c. p. 114.

Aberration.

Solange man sich auf die Untersuchung des axialen Bündels in zentrierten optischen Instrumenten beschränkte, war Aberration gleichbedeutend mit Abweichung von der Homozentrität. In diesem allgemeinsten Sinne umfaßt also der Begriff der monochromatischen Aberrationen auch die durch Astigmatismus und Asymmetrie oder sogenannte Koma bedingten Abweichungen und müßte eigentlich auch auf solche höherer Ordnung ausgedehnt werden. Die Gesetze der Aberration wurden aber für symmetrische Abweichungen hergeleitet, welche als laterale zu der dritten, als longitudinale zu der zweiten Potenz des Neigungswinkels eines Strahles gegen den Hauptstrahl proportional sind, mithin von den Differentialquotienten vierter Ordnung in der Flächengleichung abhängen. Bei der allgemeinen Untersuchung empfiehlt es sich daher unter *Aberration im engeren Sinne* nur symmetrische Fehler zu verstehen, welche durch die Differentialquotienten vierter Ordnung in der Gleichung der Wellenfläche bestimmt werden. Außer von der Aberration eines Strahles spricht man aber auch von Instrumenten mit größerer oder geringerer Aberration, wobei eine Eigenschaft des im Instrumente gebrochenen Strahlenbündels gemeint wird. Da ich nun durch die Untersuchung der Aberrationen im engeren Sinne geometrische Größen ermittelt habe, welche für diese Stufe der Rechnung eine ähnliche Bedeutung haben wie die Asymmetrienwerte für die Komafehler, und da diese Werte ebenso wie jene von Strahl zu Strahl variieren, so spreche ich von den durch dieselben bestimmten *Aberrationen eines Strahlenbündels* von endlicher Öffnung *längs einem bestimmten Strahle*. Diese Aberrationswerte sind also von der Blendengröße unabhängig. Je kleiner aber die Blende ist, um so genauer kann aus ihnen die Abweichung des periphersten Strahles berechnet werden. Für das axiale Strahlenbündel in zentrierten optischen Instrumenten, wo es nur einen Aberrationswert gibt, ist dieser gewöhnlich nicht gleich Null, wenn „die sphärische Aberration behoben ist“, indem darunter gewöhnlich die Behebung der Abweichung eines Rand- oder intermediären Strahles verstanden wird. Um diese Begriffe auseinander zu halten, habe ich die Abweichung eines Rand-

strahles bei bestimmter Blendengröße als *periphere Totalaberration* bezeichnet. Durch die Kenntnis der Aberration längs der Achse und der einer bestimmten Blendengröße entsprechenden peripheren Totalaberration ist man schon einigermaßen imstande, eine Vorstellung von der Wirkung der sonst sogenannten Zonen der sphärischen Aberration zu gewinnen. Von diesen beiden Werten entspricht aber nur die Aberration längs der Achse dem Begriffe der Aberrationen im engeren Sinne, während die periphere Totalaberration durch rechnerische Verfolgung eines Randstrahles ermittelt werden muß.

Im Falle des axialen Strahlenbündels in einem aus Umdrehungsflächen zusammengesetzten zentrierten optischen System genügt es die Schnittlinie der Wellenfläche mit einer der Koordinatenebenen zu untersuchen. Wird also in der Flächen-gleichung $y = 0$ gesetzt, so resultiert eine Gleichung $z = f(x)$, in welcher die Krümmung der fraglichen Schnittlinie in einem beliebigen Punkt allgemein durch die Formel

$$D = \frac{r}{N^3}$$

erhalten wird, in welcher

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad N^2 = 1 + \left| \frac{dz}{dx} \right|^2$$

gesetzt worden ist. Wird diese Gleichung zweimal differentiiert, dann

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

gesetzt, mithin dasjenige Koordinatensystem gewählt, in welchem der Hauptstrahl mit der Z-Achse zusammenfällt, so ergibt sich

$$\frac{d^3 D}{ds^3} = \frac{d^4 z}{dx^4} - 3 D^3.$$

Dieser Wert, den ich mit Φ bezeichne, dient zur geometrischen Charakterisierung der Fläche auf der fraglichen Stufe der Rechnung. Ist er positiv, so hat die Umdrehungsfläche im Pol eine schwächere Krümmung, ist also bei positiver Krümmung hier flacher als in den umgebenden Punkten, und der Unterschied von der Form der oskulierenden Sphäre wird in erster Annäherung durch denselben gemessen. Ich nenne deshalb Φ den *Abflachungswert* der Fläche im fraglichen Punkte,

d. h. im Pol der Umdrehungsfläche, da andere Punkte nicht durch *einen* Abflachungswert hinreichend charakterisiert sind. Die geometrische Bedeutung des Abflachungswertes kann an Umdrehungsflächen zweiten Grades illustriert werden. Wird die allgemeine Gleichung einer solchen für das angewendete Koordinatensystem

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{c},$$

welche ein Rotationsellipsoid, -paraboloid bez. -hyperboloid bezeichnet, je nachdem $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = 0$ bez. $\varepsilon = -1$ gesetzt wird, differenziert, so ergibt sich für $y = 0$, d. h. für die Schnittlinie mit der XZ -Ebene:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d^2x}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{dx^2} = \frac{c}{a^2}, \quad \frac{d^4x}{dx^4} = \frac{3sc}{a^4},$$

woraus resultiert

$$-\frac{\Phi}{3D^3} = \frac{c^2 - \varepsilon a^2}{c^2}.$$

Dies besagt, daß, wenn Abflachungswert und Krümmung verschiedenes Vorzeichen haben, die Zahl $-\Phi/3D^3$ das Quadrat der Exzentrizität jener konischen Sektion darstellt, in welcher die XZ -Ebene die Umdrehungsfläche zweiten Grades schneidet, welche mit der fraglichen Umdrehungsfläche eine vollständige Berührung vierter Ordnung im Pole hat, d. h. bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der für die Berechnung der Aberration in Frage kommenden mit ihr zusammenfällt, während, wenn Abflachungswert und Krümmung dasselbe Vorzeichen haben, die Zahl $\Phi/3D^3$ gemäß obenstehendem Ausdrucke die Achsen des Rotationsellipsoids angibt, welches in seinem Punkte kleinster Krümmung die erwähnte Berührung mit der untersuchten Fläche hat.

Die Beziehung des Abflachungswertes zu dem von Siedentopf¹⁾ nach Abbe angegebenen Deformationskoeffizienten α findet man, indem die in Polarkoordinaten gegebene Gleichung für ein rechtwinkliges Koordinatensystem umgeformt wird, durch entsprechende Differentiation, wobei

$$\Phi = -24\alpha$$

erhalten wird.

1) I. c. M. v. Rohr, Die Theorie etc. p. 26.

Die dem Abflachungswerte entsprechende, die Evolute charakterisierende geometrische Größe kann auf folgende Weise ermittelt werden. Wenn allgemein für eine in der XZ -Ebene gelegene krumme Linie ϱds bez. $R d\sigma$ Krümmungshalbmesser und Bogenelement der Linie selbst bez. deren Evolute bezeichnen, so gilt für den Öffnungswinkel w unter Berücksichtigung der Richtung, in welcher die Krümmungen positiv gerechnet werden, und wenn man die Bogenelemente in derselben Richtung wie die betreffenden Koordinaten positiv rechnet,

$$dw = \frac{ds}{\varrho} = - \frac{d\sigma}{R},$$

weil ja die Normalen der Evolute auf den entsprechenden Normalen der Evolvente senkrecht stehen. Allgemein ist nun, wie oben bewiesen worden,

$$- \frac{d\varrho}{dw} = R,$$

d. h. durch Differentiation

$$- \frac{d^2\varrho}{dw^2} = \frac{dR}{dw} = - R \frac{dR}{d\sigma} = A,$$

wenn mit A der Krümmungshalbmesser der Evolute von der Evolute bezeichnet wird. Für den Fall einer Umdrehungsfläche, deren Achse mit der Z -Achse zusammenfällt, erhält man unmittelbar

$$- \frac{d^2\varrho}{dw^2} = \frac{\Phi}{D^4},$$

mithin

$$A = \frac{\Phi}{D^4} = - \frac{d^2\varrho}{dw^2}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser A , den ich den *Aberrationswert des Strahlenbündels* nenne, enthält alles, was von der Aberration im engeren Sinne im fraglichen Strahlenbündel ausgesagt werden kann, und an demselben ist man sehr gut imstande, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie viel — oder wie wenig — dies ist. Man ersieht, daß die Schnittlinie der Evolute oder kaustischen Fläche des Strahlenbündels mit einer Meridianebene als Kreisevolvente durch Abwicklung eines Fadens konstruiert werden kann. Da der Evolutenradius von der Wellenfläche gleich Null ist, mithin die fragliche

Schnittlinie eine Spitze hat, welche ihre eigene Evolute berührt, so erhält man durch eine Abwicklung nur einen Zweig der kaustischen Linie. Den anderen erhält man, wenn der Faden in entgegengesetzter Richtung aufgewickelt wird, indem man die Abwicklung wieder am selben Berührungspunkte beginnt. Fällt die positive Richtung der Z -Achse, wie gewöhnlich, mit der Bewegungsrichtung des Lichtes zusammen, so bedeutet ein positiver Wert von A eine sogenannte positive oder unterkorrigierte sphärische Aberration.

Durch den Aberrationswert ist nur der Krümmungsradius der Evolute von der kaustischen Linie im Berührungspunkte beider gegeben. Die kaustische Linie kann also ebensogut von einer anderen beliebigen Kurve abgewickelt werden, welche im Berührungspunkte dieselbe Krümmung hat, nur darf diese Kurve keine Inflexionspunkte haben — wohl aber Spitzen von derselben Art wie die der kaustischen Linie — da nämlich erstere einem unendlich großen Asymmetrienwert längs dem entsprechenden Strahle entsprechen würden, was ausgeschlossen ist. Da nun sämtliche Strahlen des Strahlenbündels als Tangenten der gewonnenen kaustischen Linie konstruiert werden, so kann man auf diese Weise eine beliebige Anzahl Strahlenbündel mit einem und demselben Aberrationswerte konstruieren, welche in anschaulicher Weise die Bedeutung dieses Wertes illustrieren.

Bekanntlich wird die kaustische Linie gewöhnlich als semikubische Parabel aufgefaßt und konstruiert. Von dieser Auffassung ist ebensoviel richtig wie von der Auffassung derselben als der Evolvente einer beliebigen Kurve mit dem entsprechenden Krümmungsradius im Berührungspunkte, da die Spitze der fraglichen semikubischen Parabel bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der dem Aberrationswerte entsprechenden mit der Spitze der genannten Evolvente zusammenfällt.

Die semikubische Parabel erhält man durch sukzessive Differentiation der oben angewendeten Gleichungen für die Evolute

$$N(\xi - x) = -p\varrho, \quad N(\zeta - z) = \varrho,$$

wobei für die Schnittlinie einer Umdrehungsfläche mit der

XZ -Ebene im angewendeten Koordinatensystem resultiert (x als unabhängige Variable betrachtet)

$$\zeta = \varrho, \quad d\xi = d^2\xi = d\zeta = 0, \quad d^2\zeta = d^2\varrho = -\frac{\Phi}{D^2} dx^2,$$

sowie

$$d^3\xi - 3d^2Nd x = -3dp d^2\varrho - \varrho d^3p = \left(\frac{3\Phi}{D} - \frac{1}{D} \frac{d^4x}{dx^4}\right) dx^3,$$

oder da $d^2N = D^2 dx^2$, ist:

$$d^3\xi = \frac{2\Phi}{D} dx^3.$$

Werden dann ξ und ζ nach Potenzen von x entwickelt, so erhält man

$$\xi = \frac{x^3 \Phi}{8D}, \quad \zeta - \varrho = -\frac{x^2 \Phi}{2D^2}$$

und nach Elimination von x die Gleichung der semikubischen Parabel

$$9A\xi^2 = -8(\zeta - \varrho)^3,$$

aus welcher wieder durch Differentiation auf gewöhnliche Weise der Wert A für den Evolutenradius in der Spitze erhalten werden kann.

Für die laterale Aberration in der Fokalebene $\zeta = \varrho$ findet man durch Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0:$$

$$d^3\xi = d^3x - \varrho d^3p + 3dp d^2z = -\frac{\Phi}{D} dx^3 = -Adw^3,$$

da nämlich $d^3p = (d^4z/dx^4) dx^3 + r d^3x$ ist.

Es ist also die laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w^3}{6} A$$

und die Beziehung des Aberrationswertes zu den Koeffizienten α von Czapski und anderen

$$A = -6\alpha.$$

Durch Differentiation des analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen erhält man die für diesen Sonderfall früher bekannte Formel für die Berechnung der Aberration, wobei aber der Abflachungswert der brechenden Fläche mitberücksichtigt wird.

Mit dieser Darstellung der Aberration des axialen Bündels in einem zentrierten System habe ich am einfachsten Beispiele

die Methode demonstrieren wollen, welche die Untersuchung der Aberrationen im allgemeinen Fall und die vollständige Diskussion der Sonderfälle ermöglicht hat. Eine solche Untersuchung wäre nach der bisher für die sogenannte sphärische Aberration angewendeten Methode, so weit ich sehen kann, nicht möglich.

Schon bei der Untersuchung der Aberration längs dem axialen Strahle in einem Instrumente für anamorphotische Abbildung scheitert diese Methode, da zwar die in den beiden Hauptschnitten des Instrumentes verlaufenden Strahlen untersucht werden können, wobei sich zwei Aberrationswerte ergeben, die Aberrationen aber erst durch drei voneinander unabhängige Werte bestimmt sind.

In diesen Instrumenten ist das axiale Strahlenbündel zwischen zwei Brechungen astigmatisch mit zwei Symmetrieebenen. Für solche Strahlenbündel ist die Wellenfläche durch die vier geometrischen Größen

$$\Phi' = \frac{d^2 D_1}{ds_1^2}, \quad \Omega' = \frac{d^2 D_1}{ds_1^2}, \quad \Omega'' = \frac{d^2 D_2}{ds_2^2}, \quad \Phi'' = \frac{d^2 D_2}{ds_2^2}$$

bestimmt, welche ich in Übereinstimmung mit der für die Asymmetrienwerte angewendete Terminologie benenne, so daß Φ' bez. Ω'' die direkte bez. transversale Abflachung längs der ersten Krümmungslinie messen, die beiden anderen die entsprechende Bedeutung für die zweite Krümmungslinie haben. Die beiden transversalen Abflachungswerte sind aber nicht unabhängig voneinander, wie aus den Beziehungen zu den Differentialquotienten vierter Ordnung der Flächengleichung hervorgeht.

Diese sind im oben angewendeten Koordinatensysteme

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 3r^2, & \Omega' &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - r^2 t^2, \\ \Omega'' &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - r^2 t^2, & \Phi'' &= \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} - 3t^2, \end{aligned}$$

wonach

$$\Omega' - \Omega'' = D_1 D_2 (D_1 - D_2)$$

ist. Die beiden übrigen Differentialquotienten vierter Ordnung sind bei Vorhandensein von auch nur einer Symmetrieebene in diesem Koordinatensystem gleich Null.

Für das Strahlenbündel kommen die vier Größen

$$A' = \frac{\Phi}{D_1^4}, \quad C' = \frac{\Omega'}{D_1^2 D_{11}^2}, \quad C'' = \frac{\Omega''}{D_1^2 D_{11}^2}, \quad A'' = \frac{\Phi''}{D_{11}^4}$$

zur Verwendung, welche nach entsprechender Terminologie als direkte bez. transversale Aberration im betreffenden Hauptschnitt benannt werden. Die beiden Evolutenschalen haben je eine Kante, welche in einer der Symmetrieebenen liegt. Für ihre Schnittlinien mit der anderen Symmetrieebene gibt der betreffende Wert der direkten Aberration dieselben Beziehungen wie oben der Aberrationswert für das Normalenbündel einer Umdrehungsfläche. Die Krümmung der Kantlinie ist für die erste bez. zweite Schale

$$-\frac{C''}{E^2} \quad \text{bez.} \quad -\frac{C'}{E^2}.$$

Da nun, wie ersichtlich, $C' - C'' = E$, mithin die Differenz der beiden Krümmungen gleich $1/E$ ist, so ist ein Strahlenbündel mit geraden Kantlinien der beiden Evoluten mathematisch unmöglich. Es folgt hieraus, wie schon hervorgehoben worden ist, daß das Konoid von Sturm zwar das astigmatische Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen repräsentieren kann, dabei aber die beiden Brennlinien nicht gerade sein dürfen, falls überhaupt ein mathematisch mögliches Strahlenbündel dargestellt werden soll. Werden aber im Konoide die Krümmungen der Brennlinien in Übereinstimmung mit dem eben angegebenen Gesetze bestimmt, so hat dasselbe einen Sinn, indem im Modelle die Brennlinien, in der Wirklichkeit die Kantlinien der Evolute eine Strahlenvereinigung zweiter Ordnung bedeuten.

Die Werte für die lateralen Aberrationen eines Strahles sind

$$\xi = -\frac{w_1^3}{6} A' - \frac{w_1 w_{11}^2}{2} C'', \quad \eta = -\frac{w_1^2 w_{11}}{2} C' - \frac{w_{11}^3}{6} A'',$$

wobei wie oben erstere in der ersten, letztere in der zweiten Fokalebene gemessen wird. Da nun $C' - C'' = E$ ist, so ist ein astigmatisches Strahlenbündel ohne laterale Aberration mathematisch unmöglich, was mit dem erwähnten Verhalten der Kantlinienkrümmungen in Zusammenhang steht.

In einem Instrumente für anamorphotische Abbildung ist das Strahlenbündel nach der letzten Brechung wieder anastigmatisch, aber vom dem Normalenbündel einer Umdrehungsfläche weit verschieden. In diesem wird der Hauptstrahl in jeder Meridianebene von nächstliegenden Strahlen geschnitten, in jenem nur in zwei oder vier Ebenen je nach der relativen Größe der Aberrationswerte. Solcher gibt es nur drei, da die transversale Aberration in den beiden Symmetrieebenen die gleiche ist. Da die transversale Aberration für den Verlauf der Strahlen in den Winkeln zwischen den beiden Symmetrieebenen bestimmend ist, so bezeichne ich dieselbe im anastigmatischen Strahlenbündel auch als Diagonalaberration. Das Vorhandensein von zwei Hauptschnitten außer den Symmetrieebenen wird durch die Bedingungs-
gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{A' - 3C}{A'' - 3C}$$

für die Tangente des Winkels zwischen den betreffenden Hauptschnitten und der ersten Symmetrieebene bestimmt. Wenn die direkten Aberrationswerte beide das Dreifache der diagonalen betragen, so wird die Lage anderer Hauptschnitte nicht mehr durch diese Gleichung bestimmt. Die Wellenfläche hat dabei eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche, und es entscheiden erst weitere Differentiationen über die Existenz und Lage anderer Hauptschnitte.

Es ist bekannt, daß eine verschiedene Einstellung eines optischen Instrumentes bei verschieden großer Blende durch die sogenannte sphärische Aberration bedingt wird. Wenn nun in einem anastigmatischen Strahlenbündel die beiden Werte der direkten Aberration nicht identisch sind, so hat dies zur Folge, daß die scharfe Einstellung für solche Linien am Objekte, welche in den Symmetrieebenen verlaufen, nur für eine bestimmte Blendengröße dieselbe sein kann. Das Instrument wirkt also, als ob es längs der Achse mit Astigmatismus behaftet wäre, dessen Grad mit der Blendengröße wechselt. Diese Eigenschaft nenne ich astigmatische Aberration, indem ich den Astigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' - A''$ der beiden direkten Aberrationswerte messe. Auf dieselbe Weise messe ich den Diagonalastigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' + A'' - 6C$. Der Effekt der diagonal-

astigmatischen Aberration des gebrochenen Strahlenbündels ist die Notwendigkeit einer verschiedenen Einstellung des Instrumentes für die scharfe Abbildung eines in der Objektebene belegenen Kreuzes, je nachdem dessen Linien in den Symmetrieebenen liegen oder einen diagonalen Verlauf haben. Sind die beiden direkten Aberrationswerte gleich, so daß kein Astigmatismus der Aberration vorhanden ist, wobei die Abbildung des Kreuzes in beiden Lagen von der zweiten Ordnung ist, indem die vier Hauptschnitte einen Winkel von 45° miteinander bilden, so tritt die eventuell vorhandene diagonalastigmatische Aberration besonders deutlich hervor, wie es die Taf. VIII zeigt, welche die Photographie eines leuchtenden Punktes unter Anwendung eines Objektives mit diagonalastigmatischer Aberration darstellt. Der leuchtende Punkt war ein Sonnenbildchen, das Objektiv eine dem photographischen Teleobjektive ähnliche Kombination aus einer bilyndrischen Lupe und einem positiven Okulare. Die bilyndrische Lupe besteht aus vier planzylindrischen Gläsern, jedes von ca. 16 cm Brennweite, deren konvexe Flächen alle nach dem Okulare gekehrt sind, und von denen die vorderste und hinterste Linse unter sich parallele Achsen haben, welche auf den Achsen der beiden mittleren senkrecht stehen. Der wegen der Dicke der Linse resultierende, sonst unmerkliche Astigmatismus der bilyndrischen Lupe, welcher sich in der empfindlichen Kombination mit dem Okulare bemerkbar macht, wurde durch eine passend eingeschaltete schwache Zylinderlinse behoben. Bei der Reproduktion auf der Tafel ist die Originalphotographie um $\frac{1}{2}$ verkleinert worden.

Der Bau der kaustischen Fläche im anastigmatischen symmetrischen Strahlenbündel ist für jeden Fall aus den Aberrationswerten berechnet. Im dargestellten Typus ist dieser relativ einfach. Dieser Typus bietet dadurch Interesse, daß die Strahlengebilde, die wir um die Sterne sehen, durch ähnliche Aberrationsvorgänge höherer Ordnung in der Kristalllinse bedingt werden. Auf dem Bau des anastigmatischen Strahlenbündels näher einzugehen, dürfte hier nicht der Platz sein, ich füge nur hinzu, daß die für das astigmatische gegebenen Werte der lateralen Aberrationen eines Strahles auch hier ihre Gültigkeit beibehalten. Die Aberrationswerte des gebrochenen symmetrischen Strahlenbündels erhält man aus den entsprechen-

den Werten des einfallenden und den Abflachungswerten der brechenden Flächen mittels der von mir angegebenen Formeln.

Für Strahlenbündel mit einer Symmetrieebene kommen, wie auch im allgemeinen Strahlenbündel, dieselben Aberrationswerte wie im symmetrischen zur Verwendung, nur sind einerseits die Relationen der Aberrationswerte zu den Abflachungswerten der Wellenfläche, andererseits die Beziehungen dieser zu den entsprechenden Differentialquotienten der Flächen-gleichung nicht mehr so einfach. Beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gibt es, wie oben gezeigt worden ist, auch nur diese vier Aberrationswerte für die eindeutige Bestimmung des Strahlenbündels, und die Beziehung $C'' - C''' = E$ ist allgemeingültig, so daß von den vier Aberrationswerten auch hier nur drei unabhängig sind.

Da die Aberration bei schief einfallenden Strahlenbündeln in zentrierten optischen Systemen neuerdings¹⁾ Gegenstand der Untersuchung geworden sind, führe ich hier die für die lateralen Aberrationen geltenden Formeln an, um zu zeigen, wie die Abhängigkeit der beiden transversalen Aberrationswerte voneinander auch hier zutage tritt. Wenn nämlich der Ausdruck für die erste laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w'^3}{6} a_1 - \frac{w, w'',^2}{2} a_2$$

geschrieben wird, so kann dem Ausdrucke für die zweite folgende Form gegeben werden²⁾:

$$\eta = -\frac{w,^3 w''}{2} (a_2 + E) - \frac{w'',^3}{6} a_3.$$

Auch im allgemeinen Strahlenbündel sind die Ausdrücke für die lateralen Aberrationen³⁾ äußerst einfach, wenn krummlinige Koordinaten zur Verwendung kommen und die Öffnungswinkel längs den abwickelbaren Flächen, nicht längs den Hauptschnitten gerechnet werden.

Die Berechnung der Aberrationswerte im gebrochenen Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie ist einfach eine

1) A. König u. M. v. Rohr, l. c. p. 307 ff.

2) l. c., Allgemeine Theorie etc. nach den Formeln p. 39.

3) Ebenda p. 41.

Differentiationsaufgabe und kann sofort ausgeführt werden, wenn ein Bedürfnis dafür vorliegt. Ich habe diese Differentiation nicht ausgeführt, weil ich derselben nicht nötig gehabt habe. Persönlich bin ich auch davon überzeugt, daß es für die nähere Untersuchung eines weit geöffneten asymmetrischen Strahlenbündels vorteilhafter ist, die Asymmetrienwerte nebst den Schnittweiten für ein paar Strahlen zu berechnen als die Aberrationswerte längs einem Hauptstrahle zu suchen.

Aber auch für die nähere Untersuchung weit geöffneter axialer Strahlenbündel dürfte es vorteilhafter sein, Schnittweiten und Asymmetrienwerte für einige mittlere Strahlen und den Randstrahl zu berechnen als die sogenannten Zonen durch Reihenentwicklung mittels der längs dem Hauptstrahl gültigen Aberrationswerte höherer Ordnung zu ermitteln zu suchen. In zentrierten, aus Umdrehungsflächen bestehenden Systemen braucht hierbei nur die direkte Asymmetrie berechnet zu werden, da die transversale numerisch gleich der Brennstrecke multipliziert mit der Kotangente des Winkels ist, den der gebrochene Strahl mit der Achse des Instrumentes bildet, wie aus obiger Darstellung hervorgeht.

Ist z. B. in einem Objektiv mit „korrigierter sphärischer Aberration“ der Aberrationswert längs der Achse positiv, wobei sogenannte positive Zonen vorhanden sind, und bezeichnet man den daraus resultierenden direkten Asymmetrienwert eines sehr wenig geneigten Strahles im axialen Bündel als positiv, so kann man sofort aus dem Vorzeichen des Asymmetrienwertes längs einem etwas mehr geneigten Strahle ersehen, ob die dem positiven Zonenfehler entsprechende Kante der kaustischen Fläche einer größeren oder geringeren Strahlenneigung als der des untersuchten Strahles entspricht. Bei zunehmender Neigung gegen die Achse bleibt die Asymmetrie erst positiv, um dann durch Null in negative Werte überzugehen. Derjenige Strahl, längs welchem die Asymmetrie behoben ist, schneidet, in die Blendenebene verfolgt, zusammen mit den entsprechenden, in anderen Meridianebenen verlaufenden Strahlen diese Ebene längs einem Kreise, den ich eine Linie $U = 0$ genannt habe. Bei kompliziertem Korrektionszustande können nun mehrere Linien $U = 0$ vorkommen, aber immer wird man, wenn diese bekannt sind, aus der Neigung des entsprechenden Strahles

und der längs diesem ermittelten Schnittweite die exakte Lage der Kanten der kaustischen Fläche finden. Die auf einem Meridianschnitte der kaustischen Fläche diesen Kanten entsprechenden Spitzen der Schnittlinie genügen zusammen mit dem Aberrationswerte längs dem Hauptstrahl und der Schnittweite, eventuell auch dem Asymmetrienwerte längs dem Randstrahl zur Konstruktion der kaustischen Fläche, welche den sichersten Grund für die Beurteilung des Korrektionszustandes abgibt.

Daß die Methode der Projektion eines Zerstreuungskreises zurück in die Objektebene kein absolutes Maß für diese Beurteilung abgibt, ist ja längst bekannt, da die Abschätzung eigentlich erst dann anfängt, wenn man zu entscheiden hat, wie große Zerstreuungskreise bei dem Zwecke des Instrumentes zulässig sind. Dies hängt aber in erster Linie von der Lichtverteilung innerhalb des Zerstreuungskreises ab, welche sich am leichtesten durch die Form der kaustischen Fläche beurteilen läßt, da jeder Kante eine Lichtkonzentration längs dem dieselbe berührenden Strahle entspricht. Für die Rückprojektion in die Objektebene dürfte auch kein Bedürfnis vorliegen, da auf der Stufe, wo die Aberration untersucht wird, die Vergrößerung des Instrumentes längst bekannt ist, mithin die von der Zerstreuungsfigur gedeckten Details ebenso bequem am Bilde untersucht werden können wie am Objekte.

Es hat ja unter allen Umständen die praktische Erfahrung das letzte Wort in der Frage, wie große Fehler zulässig sind, und eine solche kann ebensogut an die Form der kaustischen Fläche anknüpfen wie an die Größe der in die Objektebene zurückprojizierten Zerstreuungskreise. Für erstere können hinreichend viele mathematisch exakte Data ermittelt werden, letztere sind durch Reihenentwicklung gewonnen.

Vor der Berechnung der Zonenfehler durch Reihenentwicklung mittels Aberrationswerten höherer Ordnung, welche längs der Achse gültig sind, dürfte die Methode der Untersuchung der kaustischen Fläche den Vorteil der mathematischen Genauigkeit haben. Gegenüber der Methode der trigonometrischen Verfolgung möglichst vieler Strahlen verhält sie sich offenbar wie die Berechnung der Schnittweiten mittels der Brechungsformeln gegenüber der Ermittlung derselben

durch trigonometrische Verfolgung zweier wenig gegeneinander geneigter Strahlen.

Umgekehrt können die Kanten der kaustischen Fläche und die denselben entsprechenden Linien $U = 0$ in der Blende ebene am fertigen Instrumente experimentell untersucht werden, wodurch die Beschaffung hinreichenden Materiales für die Erfassung erleichtert wird. Auf solche Weise konnte auch der Korrektionszustand des Auges trotz der komplizierten, durch die Kristalllinse verursachten Aberrationen höherer Ordnung ermittelt werden.

(Eingegangen 2. November 1905.)

4. Über die von den sekundären β - und γ -Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation¹⁾; von Gottlieb Kučera.

Einleitung. Wenn Radiumstrahlen auf feste oder flüssige Körper auffallen, so entsteht an den bestrahlten Stellen eine neue Radiation, die sogenannte Sekundärstrahlung. Dieselbe wurde von Becquerel im Jahre 1901 auf photographischem Wege entdeckt und ist im gewissen Sinne der von Sagnac entdeckten Sekundärröntgenstrahlung analog. Gegenstand der vorliegenden Untersuchung war die Ionisation, welche von den Sekundärstrahlen in verschiedenen Gasen verursacht wird. Einen indirekten Anstoß zu dieser Arbeit gab die Ansicht Rutherfords²⁾, daß überall da, wo sich Elektronen losreißen oder wo sie auftreffen, eine Röntgenstrahlung entstehen muß, und zwar im ersten Falle eine harte, im zweiten eine weiche. Wenn aber die Sekundär- β -Strahlung aus weichen Röntgenstrahlen bestehen sollte, so müßte sie eine von den β - und γ -Strahlen stark abweichende Ionisation verursachen.

Versuchsordnung. Als Strahlungsquelle diente eine Kapsel mit 5 mg von reinstem Radiumbromid (Gieselsches Präparat). Die α -Strahlen werden im Glimmerblatt, welches das Salz bedeckt, absorbiert, so daß nur die β - und γ -Strahlen heraustreten. Die Radiumkapsel *R* (Fig. 1) befand sich am Ende einer zentralen (10,4 cm tiefen und 2,8 cm breiten) Bohrung eines Bleizylinders *V* von 14,5 cm Länge und 9,5 cm Durchmesser. Die Wand der Bohrung war ihrer ganzen Länge

1) Auszug aus den „Rozpravy“ der böhm. Kaiser Franz Joseph Akademie der Wissenschaften in Prag.

2) E. Rutherford, Radioactivity, Cambridge 1904. p. 145; Nature 69. p. 486. 1904.

nach mit einer 2 mm dicken Papierschicht bedeckt, um die an dieser Wand entstehende Sekundärstrahlung zu verringern, denn diese kann nach ihrem Austritt aus der Öffnung der Bohrung eine Tertiärstrahlung veranlassen. Der Bleizylinder war zwischen den Polschuhen *S* und *N* eines starken Elektromagnets gelagert, dessen Feld die β -Strahlen ablenken sollte, um das Experimentieren mit den γ -Strahlen allein zu ermöglichen. Bei den definitiven Messungen wurde es jedoch nicht benutzt, da es sich herausstellte, daß das Feld auch auf die Sekundärstrahlung wirkte, und zwar in einer Weise, der zahlen-

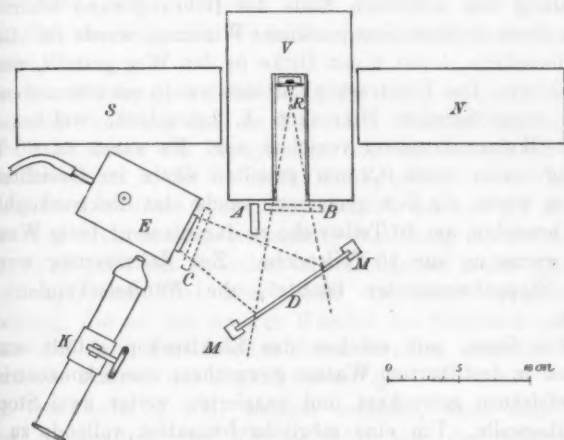


Fig. 1.

mäßig keine Rechnung getragen werden konnte. Vor der Öffnung der Bohrung war in einem Winkel von weniger als 45° ein kleines Holzgestell *M* (zwei parallele mit je einer Nut versehene vertikale Holzleisten) aufgestellt und festgeklemmt, und zwar so, daß auf die Holzteile die direkte β - und γ -Strahlung nicht auftreffen konnte; Platten *D* aus verschiedenem Material, die als Radiatoren dienten, konnten in die Nuten eingeschoben werden. Die an ihnen entstehende Sekundärstrahlung fiel durch eine seitliche, mit einem Glimmerblättchen von 0,0094 mm Dicke bedeckte Öffnung in ein Elektroskop *E* hinein und ionisierte das darin befindliche Gas. Die Einrichtung des

Elektroskopes, daß mit verschiedenen Gasen gefüllt werden konnte, eine kleine Kapazität und daher große Empfindlichkeit für Strommessungen besaß und mittels Bernstein isoliert war, soll an einer anderen Stelle des näheren beschrieben werden. Das Elektroskop wurde instinktmäßig so aufgestellt, daß der Einfallswinkel der direkten Radiumstrahlung dem Abgangswinkel der Sekundärstrahlen ungefähr gleich war; später erfuhr ich aus einer weiter unten zitierten Arbeit von McClelland, daß in dieser Richtung die Sekundärstrahlung am kräftigsten ist. Damit in das Elektroskop keine Sekundärstrahlung vom äußersten Ende der Bohrungswand eindringen kann (denn sie hatte eine merkbliche Wirkung), wurde ihr ständig ein Bleischirm *A* von 6 mm Dicke in den Weg gestellt, der sie absorbierte. Das Elektroskopblättchen wurde mit einem ziemlich stark vergrößernden Mikroskop *K* betrachtet, welches mit einem Okularmikrometer versehen war. Es waren ca. 60 Teilstriche seiner nach 0,2 mm geteilten Skala im Gesichtsfeld, und es wurde die Zeit gemessen, welche das Elektroskopblättchen brauchte, um 40 Teilstriche zu durchlaufen; beim Wasserstoff waren es nur 10 Teilstriche. Zur Zeitmessung wurden zwei Stoppchronometer benutzt, die Fünftelsekunden angaben.

Die Gase, mit welchen das Elektroskop gefüllt wurde, wurden in destilliertem Wasser gewaschen, durch konzentrierte Schwefelsäure getrocknet und passierten weiter zwei Stopfen aus Glaswolle. Um eine mögliche Ionisation vollends zu beseitigen, wurden sie dann durch eine 35 cm lange Messingröhre von 2 cm Durchmesser hindurchgeleitet, die durch zwei Ebonitpfropfen an beiden Enden verschlossen war und in der Achse einen 1 mm dicken Messingdraht trug. Die Röhre war geerdet, und der Messingdraht, der mit einer Leidener Batterie verbunden war, auf ein Potential von 500—1000 Volt (mit einem Braunschen Elektrometer bestimmt) geladen. Durch dieses starke Feld wird das hindurchstreichende Gas von gewöhnlichen Ionen befreit. War das Elektroskop mit einem anderen Gase als Luft gefüllt, so wurde darin ein kleiner Überdruck von einigen Zentimetern Wassersäule gegenüber dem äußeren barometrischen Druck aufrecht erhalten, der mittels eines Wassermanometers gemessen wurde.

Berechnung der Ionisation. Die Ionisation eines Gases wird gemessen, indem man sie dem Sättigungsstrom proportional setzt, der darin bei genügender Voltage entsteht. Wird die Messung mit einem Elektroskop ausgeführt und sind φ_1 , V_1 und C_1 sein Ausschlag, Potential und Kapazität, die in der Zeit t auf die Werte φ_2 , V_2 und C_2 fallen, so ist die Intensität i des Sättigungsstromes

$$i = \frac{V_1 C_1 - C_2 V_2}{t},$$

also der Fallzeit des Blättchens von φ_1 auf φ_2 umgekehrt proportional.

In den nachfolgenden Versuchen wurden folgende Größen gemessen:

1. Der Strom i_0 , welcher im Elektroskop entsteht, wenn die ganze β -Strahlung und ein Teil der γ -Strahlen abgefangen werden, teils durch den Bleizylinder, teils durch einen 6,2 mm dicken Bleischirm B , der vor seine Öffnung gestellt wird (Fig. 1). Die Ionisation im Gase rührt hauptsächlich her von der in das Elektroskop direkt hineingelangenden γ -Strahlung, die allerdings durch die Wände des Zylinders hindurchgehen mußte („harte γ -Strahlung“) zum Teil aber auch von einer sekundären γ -Strahlung, die an den inneren Wänden des Elektroskopes an den Austritt- bez. Auffallstellen dieser Strahlen entsteht. Die beobachtete Fallzeit des Blättchens sei t_0 .

2. Der Strom $i_0 + i_1$, welcher entsteht, wenn man den Schirm B beseitigt; der Teil i_1 rührt von der Sekundärstrahlung der Luft vor der Öffnung des Bleizylinders her. Fallzeit t_1 .

3. Der Strom $i_0 + i_1 + i_P$, welcher nach dem Hinzutreten der sekundären Strahlung von Blei, also nach dem Einschieben einer Bleiplate in den Holzrahmen entsteht. Die Fallzeit sei t_P .

4. Die analoge Stromstärke $i_0 + i_1 + i_x$ für die Sekundärstrahlung eines anderen Stoffes x .

5. Die Stromstärke $i_0 + i_\gamma$, wenn die Sekundärstrahlung von Blei nur durch γ -Strahlen erregt wird, also der Schirm B und die strahlende Bleiplate angewandt werden; entsprechende Fallzeit sei t_γ .

Wenn man anstatt der Fallzeiten t ihre reziproken Werte mit den entsprechenden Indizes einführt, so hat man

$$i_0 = K \cdot \tau_0, \quad i_0 + i_1 = K \cdot \tau_1, \quad i_0 + i_1 + i_P = K \cdot \tau_P,$$

$$i_0 + i_1 + i_x = K \cdot \tau_x \quad i_0 + i_\gamma + K \cdot \tau_\gamma,$$

wo K eine Konstante ist, die bei gleichbleibendem q_1 und q_2 den Wert nicht ändert. Bezeichnen wir noch die Stromstärken bez. Ionisationen und reziproke Fallzeiten bei einem anderen Gase als Luft mit großen Buchstaben J resp. T .

Dann haben wir folgende Beziehungen:

$$(1) \quad \frac{i_x}{i_P} = \frac{\tau_x - \tau_1}{\tau_P - \tau_1}, \quad (2) \quad \frac{i_1}{i_P} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_P - \tau_1}, \quad (3) \quad \frac{i_\gamma}{i_P} = \frac{\tau_\gamma - \tau_1}{\tau_P - \tau_1},$$

$$(4) \quad \frac{J_P}{i_P} = \frac{T_P - T_1}{\tau_P - \tau_1}, \quad (5) \quad \frac{J_0}{i_0} = \frac{T_0}{\tau_0}.$$

Die erste und die zweite geben die auf Blei bezogenen Intensitäten der Sekundärstrahlung des Stoffes x resp. der Luft; die dritte gibt den Anteil der γ -Strahlen an der Erregung der Sekundärstrahlen. Die vierte gibt die relative Ionisation eines Gases bezogen auf Luft als Einheit durch die Sekundärstrahlung von Blei; dieselbe Größe für einen anderen Stoff als Radiator folgt aus anderweitig bekannten Größen als

$$\frac{J_x}{i_x} = \frac{J_P}{J_P} \cdot \frac{J_P}{i_P} / \frac{i_x}{i_P}.$$

Bei der Berechnung der Größe J_P/i_P ist noch darauf Rücksicht zu nehmen, daß bei der Messung die Luft allgemein unter einem anderen Druck b gestanden, als das Gas (B). Da die Ionisation in ziemlich weiten Grenzen dem Druck des Gases proportional ist, so gilt allgemein

$$\frac{J_P}{i_P} = \frac{T_P - T_1}{\tau_P - \tau_1} \cdot \frac{b}{B}.$$

Die letzte 5. Beziehung gibt die relative Ionisation in verschiedenen Gasen durch „harte γ -Strahlen“.

Gase und Radiatoren. Die Luft wurde in das Elektroskop entweder aus dem Laboratorium oder von außen hineingeleitet; die Ergebnisse waren in beiden Fällen die gleichen. Der

Wasserstoff wurde einem mit zincum purissimum pro analysi und chemisch reiner verdünnter H_2SO_4 beschickten Kipp-schen Apparate entnommen, die Kohlensäure aus chemisch reiner Salzsäure und Marmorstückchen bereitet. Der Sauerstoff entstammte einer Bombe der Berliner Sauerstofffabrik. Das Schwefeldioxyd wurde aus H_2SO_4 und $NaHSO_3$ hergestellt. Als Radiatoren dienten je drei hintereinander gestellte und je 1 mm dicke und 1 dm^2 große gewalzte Bleche aus Pb, Al, Zn, Fe, Cu, Ni. Glas wurde in der Form von zwei abgewaschenen photographischen Platten von der Gesamtdicke von 3,9 mm, Ebonit als eine einzige 2,15 mm dicke Platte benutzt. Aus vier schmälere Platinplatten wurde eine 1 dm^2 große und in der Mitte 0,8 an zwei Seiten 0,4 mm dicke Platte durch geeignete Klammern hergestellt. Von Papier wurden 1 bis 8 Lagen Zeichenpapier von je 0,25 mm Dicke benutzt.

Die Messungen. Als Beispiel wie die Messungen und die Berechnung durchgeführt wurden, stehe hier als Tabelle I ein Auszug aus dem Beobachtungsprotokoll und zwar eine Reihe mittlerer Genauigkeit, die zweite für Kohlensäure.

Beim Wasserstoff wurde, um die Zeit der einzelnen Messungen zu verkürzen, die Fallzeit des Blättchens zwischen zehn mittleren Teilstreichen (49—39, 48—38) gemessen — für Luft als Radiator dauerte dann die Beobachtung ca. 12 Minuten. Dadurch wird die Genauigkeit etwas verringert, da der Augenblick des Durchgangs des Blättchens durch einen Teilstrich der sehr langsamen Bewegung wegen schwer genau richtig zu erfassen ist.

Eine Übersicht aller in der Weise, wie sie Tabelle I zeigt, gewonnenen Ergebnisse enthält die Tabelle II. Es ist zu bemerken, daß die drei Reihen für „Luft“ unter verschiedenen Anfangs- und Endpotentialen (ca. 250—225, 300—275, 350—330 Volt) erhalten wurden, die Übereinstimmung der Ergebnisse zeigt, daß die angewandte Voltage zur Hervorbringung des Sättigungsstromes genügt. Bei den übrigen Gasen war das Anfangspotential ca. 300 Volt.

Zur Bestimmung von J_P/i_P und J_0/i_0 wurden besondere Meßreihen gemacht und zwar in der Weise, daß die Größen τ_0 , τ_1 und τ_P zuerst für Luft und womöglich anschließend für

Tabelle I.
Kohlensäure II.

Barometerdruck 747,0 mm Hg 0°. Überdruck in CO₂ 9,0 cm H₂O = 7,4 mm Hg. Mittlere Beobachtungstemperatur 20,5° C.
Das Elektroskop wurde um 8^h p. m. mit CO₂ gefüllt.
Chronometer I gibt die Fallzeit von 64 bis 24, Chronometer II von 63 bis 23 Skt. des Mikrometers.

Nr.	Radiator	Schirm	Zeit der Beobachtung	Chronometer		Mittlere Fallzeit t sec	$T = \frac{1}{t} \cdot 10^3$	$T_z - T_1$	$\frac{J_z}{J_p}$
				I	II				
1	Luft	A	3 ^b 35 ^m	5 ^m 17,6*	5 ^m 19,6*	—	—	—	—
2	"	A	3 44	5 39,8	5 38,6	—	—	—	—
3	"	A	4 9	5 39,0	5 39,0	339,4*)	2,956	—	0,040
4	"	A	4 18	5 37,0	5 40,6	—	—	—	—
5	"	AB	4 37	6 19,8	6 21,8	380,8	2,627	—	—
6	Blei	AB	4 45	6 6	6 4,4	864,1	2,748	—	—
7	Luft	A	4 54	5 39,2	5 39,2	—	—	—	—
8	Blei	A	—	1 31,4	1 31,2	91,3**)	10,96	8,01	1,000
9	"	A	5 7	1 31,4	1 31,4	—	—	—	—
10	Aluminium	A	5 13	3 2,8	3 2,6	182,7	5,476	2,516	0,314
11	Zink	A	5 17	2 6,4	2 6,0	126,2	7,926	4,976	0,621
12	Glas	A	5 21	3 9,0	3 7,6	186,3	5,314	2,364	0,295
13	Papier, 1 Schicht	A	5 30	4 51,2	4 52,8	292,0	3,427	0,477	0,059
14	Papier, 3 Schichten	A	5 36	4 20,0	4 19,2	259,6	3,856	0,906	0,113
15	"	A	5 43	4 18,0	4 12,4	252,7	3,96	1,01	0,126
16	"	A	5 48	4 6,8	4 7,0	246,9	4,05	1,10	0,137
17	Luft	A	5 57	5 38,6	5 39,4	—	—	—	—
18	Eisen	A	6 3	2 17,6	2 18,0	137,8	7,26	4,31	0,588
19	Kupfer	A	6 8	2 8,8	2 9,8	129,3	7,736	4,786	0,596
20	Nickel	A	6 12	2 9,8	2 10,0	129,9	7,704	4,754	0,593
21	Platin	A	6 22	1 36,2	1 36,0	95,6	10,46	7,51	0,938
22	Blei	A	—	1 31,0	1 31,4	—	—	—	—
23	Ebonit	A	—	3 35,8	3 37,4	216,6***)	4,62	1,67	0,208
24	"	A	6 33	3 36,2	3 36,8	—	—	—	—
25	Luft	A	6 48	5 40,4	5 41,0	—	—	—	—

*) Mittel aus Nr. 9, 4, 17, 20.

**) Mittel aus Nr. 8, 9, 22.

***) Mittel aus Nr. 23, 24.

Tabelle II.
Relative Intensitäten der Ionisation infolge der Sekundärstrahlung verschiedener Stoffe in verschiedenen Gasen;
Ionisation durch Sekundärstrahlung von Blei = 1000.

Radiator	H ₂		Luft			O ₂		CO ₂		Mittel	Eve	Me Cleland	Dichte des Radiators		At.-Gew.	Dichte	Ionis.	At.-Gew.	Ionis.
	I.	II.	I.	II.	III.	I.	II.	I.	II.										
Blei	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	11,3	207	87,5	4,84			
Platin	—	930	—	—	914?	—	940	—	938	937	—	920	21,4	195	43,5	4,78			
Zink	644?	618	616	623	618	610	625	623	621	627	560	650	7,1	65,4	86,7	9,5			
Kupfer	605	597	590	596	590	590	592	601	596	590	560	640	8,9	63,6	67,0	9,36			
Nickel	—	588	—	—	584	—	590	—	593	582	—	—	8,8	58,7	66,6	10,0			
Eisen	549	548	546	541	544	538	541	536	538	529	541	620	7,8	55,9	69,4	9,7			
Aluminium	322	298	319	319	315	317	304	321	314	319	315	300	2,7	27,1	117	11,6			
Glas	295	293	286	296	290	295	295	298	295	281	292	312	2,5	—	117	—			
Ebonit	218	229	203	217	215	209	—	209	208	205	212	227	1,2	—	177	—			
Papier: 1 Schicht	67	55	—	62	60	54	62	60	59	51	59	—	—	—	—	—			
3 Schichten	—	119	—	127	118	109	117	121	118	106	116	—	—	—	—	—			
5 "	—	135	—	—	135	—	134	—	129	—	133	—	—	—	—	—			
8 "	151	137	134	134	140	141	148	143	137	134	140	230	—	—	0,8	175			
Luft	48	47	—	39	41	88	39	34	40	35	40	—	0,0012	—	33000	—			
Sek. γ -Strahlung	0,009, 0,012, 0,008, 0,010, 0,009, 0,013, 0,014, 0,011, 0,015, 0,012										0,190	—							
Sek. $\gamma + \beta$ -Strahlung												—							

das andere Gas bestimmt wurden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.

Relative Ionisation verschiedener Gase durch die Sekundärstrahlung $\left(\frac{J_P}{i_P}\right)$
und durch harte γ -Strahlen $\left(\frac{J_0}{i_0}\right)$.

Gas	$\frac{J_P}{i_P}$	β -Strahlen Strutt	$\frac{J_0}{i_0}$	γ -Strahlen Strutt
Luft . .	1,00	1,00	1,00	1,00
H ₂ . . .	0,160s 0,162s	0,157	0,179 0,168	0,169
O ₂ . . .	1,20	1,21	1,14s	1,17
CO ₂ . .	1,55	1,57	1,51	1,53
SO ₂ . .	1,81 (2,32)	2,31	1,84	2,13

Zur Durchführung der Rechnung wurde ein 50 cm langer logarithmischer Rechenschieber benutzt.

Diskussion zur Tabelle II. Wie aus den angeführten Zahlen ersichtlich, ist die auf Blei bezogene relative Ionisation durch Sekundärstrahlen verschiedener Stoffe in allen Gasen innerhalb der Versuchsfehler dieselbe. Man könnte erwarten, daß wenigstens bei den wenig die β -Strahlen absorbierenden Radiatoren die Ionisation wachsen wird, wenn wir zu dichteren Gasen übergehen. Da nämlich diese Radiatoren nur die langsamsten β -Strahlen absorbieren, werden sie wahrscheinlich die weichste sekundäre Strahlung aussenden, welche in dichteren Gasen relativ mehr absorbiert werden könnte, als in dünneren. Wenn ein solcher Effekt existiert, muß die Differenz der Ionisierungsstärke innerhalb der durch die Methode unvermeidlichen Versuchsfehler liegen. Die Sekundärstrahlung muß also von einer ziemlich durchdringenden Art sein und kann also auf keinen Fall den α -Strahlen analog sein. Die relativ sehr große Radiation der Luft wird dadurch erklärlich, daß eine sehr dicke Schicht strahlt, wogegen bei den anderen Stoffen die Strahlung auf eine ziemlich dünne Oberflächenschicht beschränkt ist. Dies erhellt aus den Angaben für 1, 3, 5 und 8 Schichten von Papier (Fig. 2). Je mehr Schichten hinzugefügt werden, desto langsamer wächst die Strahlung und

nähert sich einem Grenzwert, welcher dann erreicht wird, wenn die Dicke des Radiators so groß ist, daß die von seiner untersten Schicht ausgehende Sekundärstrahlung im Radiator selbst absorbiert wird, bevor sie aus ihm heraustreten kann. In zwei Spalten der Tab. II sind die Resultate von Eve¹⁾ u. McClelland²⁾ angeführt, die sich mit einer ähnlichen Messung der relativen Strahlungsfähigkeit verschiedener Stoffe beschäftigt hatten. Die Übereinstimmung der Resultate dieser beiden Forscher ist nicht besonders befriedigend; die

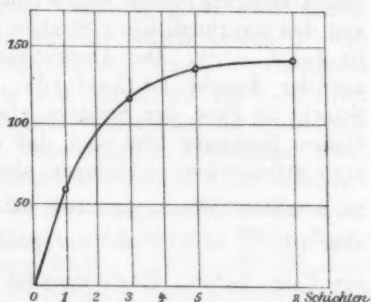


Fig. 2.

Zahlen der Tab. II liegen meistens zwischen ihren beiden. Die Gesamtergebnisse ihrer Arbeiten werden aber durch die Daten der Tabelle bestätigt. Eve fand, daß das Verhältnis $\frac{\text{Sek. Radiation}}{\text{Dichte}}$ gar nicht konstant ist, wogegen McClelland die Vermutung aussprach, daß das Verhältnis $\frac{\text{Sek. Radiation}}{\text{Atomgewicht}}$ dazu neigt, bestimmte Gruppen zu bilden, z. B. eine, wo es ca. 5 beträgt, eine andere, wo es ca. 10 gleich ist. Es scheint eher, daß dieses Verhältnis als Funktion des Atomgewichtes aufgetragen eine glatte zur Abszissenachse schwach konvexe Kurve bildet. Es wären aber mehr Beobachtungen bei verschiedenartigen Atomgewichten nötig, um diese Frage zu entscheiden. Allgemein scheint die Intensität der sekundären Strahlung mit wachsendem Atomgewicht kleiner zu werden.

In der letzten Zeile der Tab. II ist das Verhältnis der sekundären Strahlung, die durch γ -Strahlen nach dem Passieren eines 6,2 mm dicken Bleischirmes hervorgerufen wird, zur gesamten, durch alle β - und γ -Strahlen verursachten angeführt. Aus meinen Messungen folgt, daß etwa 1 Proz. der Gesamtstrahlung von den allerdings durch den Bleischirm geschwächten

1) A. S. Eve, Phil. Mag. (6) 8. p. 669. 1904.

2) J. A. McClelland, Phil. Mag. (6) 9. p. 230. 1905.

γ -Strahlen herrührt. Eve fand dagegen, daß die γ -Strahlen nach dem Passieren eines 6,3 mm dicken Bleischirmes etwa 19 Proz. der gesamten Sekundärstrahlung veranlaßten. Nach dem Durchgang durch eine x mm dicke Bleischicht verbleibt von den ursprünglichen γ -Strahlen J_0 der Teil J , welcher gleich ist $J = J_0 \cdot e^{-\lambda x}$. Der Absorptionskoeffizient λ berechnet sich aus der Angabe Rutherfords, daß in einer 9 mm dicken Schicht 50 Proz. der Strahlen absorbiert werden. Aus einer kleinen Rechnung folgt also, daß durch 6,2 mm Blei 62 Proz. der γ -Strahlen hindurchdringen; also würde die totale γ -Strahlung nach meinen Messungen etwa $1,2 \cdot \frac{100}{62} = 1,9$ Proz., nach Eve aber $19 \cdot \frac{100}{62} = 30$ Proz. der gesamten sekundären Radiation zur Folge haben. Eves Resultat ist wenig begreiflich, wenn wir bedenken, daß die Ionisationsvermögen der β - und γ -Strahlen des Radiums ungefähr im Verhältnis 100:1 stehen und umgekehrt das Verhältnis der Durchdringungsvermögen ca. 1:100 beträgt. Auch ein Ergebnis von McClelland verträgt sich besser mit meinen Messungen als mit denjenigen von Eve; er führt nämlich an, daß die sekundäre Radiation auf 7 Proz. sank, wenn in den Weg der Radiumstrahlen eine Schicht aus Zinnfolie von 0,4 mm Dicke eingeschaltet wurde, durch welche die γ -Strahlen fast gar nicht geschwächt wurden und durch welche noch ein Teil der β -Strahlen hindurchging.

In einigen Versuchen wollte ich das Elektroskop gänzlich vor der sekundären Strahlung der Luft abschirmen, und stellte schräg vor seine Öffnung einen dritten Bleischirm C von 6,0 mm Dicke (vgl. Fig. 1). Aber in diesem Falle trat anstatt der erwarteten Verminderung immer eine, wenn auch kleine Vergrößerung der Ionisation auf. Daraus folgt, daß die γ -Strahlen auch da, wo sie aus einem Körper *heraustreten*, eine Emission von sekundärer Strahlung veranlassen, die schon Eve beobachtet hat. Diese Beobachtung führe ich nur deshalb an, weil die γ -Strahlen eine weit über 5 cm dicke Bleischicht durchdrungen hatten, und doch diesen Effekt zeigten. Dadurch erklärt Eve die Resultate Paschens¹⁾ ohne die Annahme, daß die γ -Strahlen negative Ladungen mit sich führen.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 14. p. 164. 1904.

Diskussion zur Tabelle III. Unter J_P/i_P sind die durch die Sekundärstrahlen von Blei in verschiedenen Gasen verursachten relativen Ionisationen aufgeführt, unter J_0/i_0 die durch „harte“ γ -Strahlen entstandenen. Zum Vergleich geben zwei nebenstehende Spalten relative Ionisationen durch direkte β - und γ -Strahlen des Radiums, wie sie von Strutt¹⁾ bestimmt worden sind. Da die Werte von Strutt als auf 1—2 Proz. genau bezeichnet werden, so sieht man bis auf die letzte Zeile eine in den Grenzen der Versuchsfehler vollständige Übereinstimmung zwischen den relativen Ionisationen durch Sekundärstrahlen und die β -Strahlen des Radiums. Auch die Werte für γ -Strahlen, welche 1 cm (Strutt) oder 3,5 und mehr Zentimeter Blei (J_0/i_0) durchdrungen hatten, sind gleich. Die erste Übereinstimmung bestätigt das Resultat, welches McClelland durch magnetische Ablenkung erhalten hatte, daß die Sekundärstrahlung wenigstens vorwiegend aus β -Strahlen besteht. Keineswegs bestätigt sich die Vermutung Rutherfords, daß auf der Anprallstelle von Elektronen eine weiche Röntgenstrahlung entstehen würde. Da in der Formel

$$\frac{J_x}{i_x} = \frac{\frac{J_x}{J_P}}{\frac{i_x}{i_P}} \cdot \frac{J_P}{i_P}$$

der Faktor bei J_P/i_P laut Tab. II in den Grenzen der Versuchsfehler überall gleich 1 ist, sind auch die relativen Ionisationen durch Sekundärstrahlen verschiedener Radiatoren innerhalb der Versuchsfehler gleich. Es bleibt nur noch die Diskrepanz der Werte in der letzten Zeile beim SO_2 zu erklären übrig. Sie steht im Zusammenhang mit besonderen, bei frisch bereiteten Gasen auftretenden Erscheinungen.

Die Ionisation in frisch bereiteten Gasen. Frisch bereitetes Schwefeldioxyd wurde durch Glaswolle, konzentrierter Schwefelsäure und wiederum Glaswolle in das Elektroskop eingefüllt und seine durch spontane Ionisierung und harte γ -Strahlen verursachte Ionisation gemessen. Es ergaben sich Zahlen, die in der Tab. IV zusammengestellt und in der Kurve I des Diagramms 3 graphisch aufgetragen sind.

1) R. J. Strutt, Phil. Trans.-London A. 196. p. 508. 1901 u. Proc. Roy. Soc. 72. p. 208. 1903.

Tabelle IV.

Kurve I, Diagramm 3		
Beobachtungs- zeit	Fallzeit des Blättchens t sec	Leitfähigkeit $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$
0 ^m bis 5 ^m	225,8	444
„ 11	247,9	403 _s
„ 18	262,7	381
„ 24	267,2	374
„ 31	272,5	367
„ 40	279,5	358
„ 48	282,4	354
„ 56	285,4	350 _s
„ 64	285,6	350 _s
„ 73	286,9	349
„ 95	286,2	349 _s
„ 147	287,8	348

Tabelle V.

Kurve II, Diagramm 3			Kurve III, Diagramm 3		
Beob- achtungs- zeit	Fallzeit t sec	Leitfähigkeit $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$	Beob- achtungs- zeit	Fallzeit t sec	Leitfähigkeit $\tau = \frac{1}{t} \cdot 10^5$
0 ^m bis 4 ^m	117	854	0 ^m bis 3 ^m	121,3	824
„ 9	124,5	803	„ 8	126,2	792
„ 14	127,4	785	„ 18	127,8	782
„ 19	129,0	775	„ 28	127,5	784
„ 28	127,1	786	„ 32	128,2	780
„ 37	130,0	769	„ 37	128,4	779
„ 45	131,2	762	„ 43	128,4	779
„ 67	131,2	762	„ 53	129,1	774
Elektroskop stand entladen			„ 63	129,0	775
97 ^m bis 99 ^m	127,5	785	„ 72	129,1	774
„ 104	127,8	788	„ 102	129,4	772
„ 109	129,1	774			
„ 115	130,7	765			
„ 127	131,2	762			
„ 135	131,1	763			

Wie man sieht, sinkt die Ionisation (und Leitfähigkeit) zuerst schnell, dann langsamer und erreicht nach etwa einer Stunde einen Wert, der in den Grenzen der Beobachtungsfehler eine lange Zeit hindurch konstant bleibt, vorausgesetzt, daß das Elektroskop während dieser Zeit immer geladen bleibt. Bei der Berechnung der Tab. III benutzte ich bei allen Gasen diese konstanten Werte, die sich nach ca. $1\frac{1}{2}$ Stunden eingestellt haben, wie ja auch aus der Tab. I ersichtlich ist. Auf diese Weise bekam ich für die relative Ionisation durch

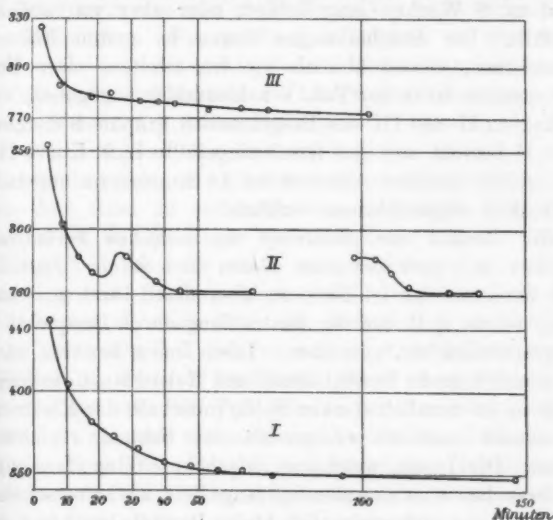


Fig. 3.

Sekundärstrahlen im SO_2 den Wert 1,81. Wenn man bei der Berechnung den ersten beobachteten Wert bald nach dem Einfüllen des Gases benutzt, so bekommt man die eingeklammerte Zahl 2,32, die mit der Struttschen in vollständiger Übereinstimmung steht. Strutt arbeitete nach einer elektrometrischen Methode, bei welcher die einzelnen Beobachtungen nur eine relativ sehr kurze Zeit (weniger als 1 Minute) dauerten, so daß sie wahrscheinlich in schneller Aufeinanderfolge gemacht wurden. Deshalb vermute ich, daß er diese anfänglichen Werte bei der Berechnung benutzte.

Leider ist in seiner Abhandlung keine Andeutung über diesen Punkt zu finden. Es wäre erwünscht, bei den Messungen der Ionisation in Gasen diesem Umstande Rechnung zu tragen. Auch die übrigen Gase H_2 , CO_2 und sogar O_3 , welches aus der Bombe entnommen wurde, zeigten diese Erscheinung, wenn auch nicht in demselben Maße wie SO_2 .

Die Ionisation in der Luft. Die Erscheinungen in der Luft waren noch verwickelter. In das Elektroskop wurde entweder Luft aus dem Laboratorium, wo sich die Radiumkapsel ca. 3 Wochen lang befand, oder aber von außen her eingefüllt. Die Erscheinungen waren im ersten Falle ausgesprochenener, jedoch ähnlich wie im zweiten. Der Verlauf der Ionisation ist in der Tab. V zahlenmäßig angegeben, und in den Kurven II und III des Diagramms 3 graphisch dargestellt. Kurve II bezieht sich auf frisch eingefüllte Luft, Kurve III auf Luft, welche nachher während ca. 14 Stunden im ungeladenen Elektroskop eingeschlossen verblieb.

Ein Versuch zur Erklärung des zeitlichen Verlaufes der Ionisation in frisch bereiteten Gasen und in der Luft. Das frisch bereitete Gas ist ionisiert, aber nicht durch gewöhnliche Ionen, welche z. B. bei der Bestrahlung durch Becquerel- oder Röntgenstrahlen etc. entstehen. Diese Ionen besitzen nämlich eine ziemlich große Beweglichkeit und Rekombinationsfähigkeit, so daß sie im ziemlich starken Felde innerhalb des Elektroskops sehr schnell innerhalb weniger als einer Sekunde verschwinden müßten. Die Ionen, welche im frisch bereiteten Gase zugegen sind, brauchen aber eine ziemlich lange Zeit, um zu verschwinden, so daß sie eine außerordentlich kleine Beweglichkeit und außerdem einen sehr kleinen Koeffizienten der Rekombination besitzen müssen. Es wäre vielleicht nicht unmöglich, daß es sich um sehr langsame Ionen handelt, die Bloch¹⁾ neuerdings gefunden, und bei denen er einen außerordentlich kleinen Rekombinationskoeffizienten bestimmt hat. Daß es sich wirklich um eine gewisse Art von Ionisation handelt, erhellt aus folgenden Versuchen: Wenn ein frisch vorbereitetes Gas ständig durch ein geladenes Elektroskop hindurchgeht, so etabliert

1) E. Bloch, Journ. d. Phys. (4) 3. p. 913. 1904; Compt. rend. 138. p. 1599. 1904.

sich ein Gleichgewichtszustand zwischen den stetig neu gelieferten und den durch das Feld auf die Elektroden weggetragenen Ionen. Die Fallzeit des Blättchens, welche bei einem derartig eingerichteten Versuch beobachtet wurde, war $4^m 30^s$, $4^m 29^s$, $4^m 35^s$, $4^m 36^s$, $4^m 26^s$, $4^m 30^s$. Wenn der Gasstrom schneller durch das Elektroskop hindurchgeleitet wird, so werden in derselben Zeit mehr neue Ionen geliefert, und es ist zu erwarten, daß die Fallzeit der Blättchen kleiner wird; der Versuch ergab $4^m 6,6^s$, $4^m 8^s$. Aber ein solcher Gasstrom führt auch eine sehr große Menge von nicht verbrauchten Ionen wieder weg. Die größte Leitfähigkeit ist also zu erwarten, wenn man das nicht geladene Elektroskop mit frischem Gase füllt und gleich nachher die Leitfähigkeit bestimmt. Zwei derartige Versuche ergaben Fallzeiten $3^m 51^s$ und $3^m 51,5^s$. Augenscheinlich geschehen Rekombinationen von diesen trägen Ionen sehr langsam, so daß das hauptsächlichste Mittel, um sie aus dem Gase zu entfernen, das elektrische Feld ist; je stärker es ist und je länger es wirkt, desto schneller muß die Leitfähigkeit sinken. Es wurde also wiederum das ungeladene Elektroskop mit frischem Gase gefüllt und die Fallzeit zu $3^m 51^s$ bestimmt; dann blieb das Elektroskop ca. 5 Minuten lang auf etwa 300 Volt geladen und im Anschluß daran wurde die Fallzeit zu $4^m 21,5^s$ bestimmt. Wenn es nachher während 7 Minuten auf etwa 600 Volt geladen gehalten wurde, stieg sie auf $5^m 1,3^s$. Sowohl der zeitliche Verlauf der Ionisation, als auch alle diese Versuche sind auf Grund der Hypothese über die Anwesenheit von sehr trägen Ionen im frisch bereiteten Gase leicht zu erklären.

Der Verlauf der Kurve II, Diagramm 3 für Luft erinnert an die Kurven von Curie¹⁾ für den Abfall der Aktivität von Körpern, die während einer sehr kurzen Zeit dem Einflusse der Radiumemanation ausgesetzt waren, wenn man bedenkt, daß daneben noch eine andere konstante und relativ sehr starke Quelle der Ionisation (nämlich die harte γ -Strahlung) tätig ist. Alle diese Versuche wurden ja angestellt in Gegenwart von Radium in dem Bleizylinder, wie es Fig. 1 veranschaulicht. Es muß nur der zweite Teil der Kurve II über-

1) P. Curie, Phys. Zeitschr. 5. p. 316. 1904.

raschen, nachdem das Elektroskop von der 67. zur 97. Minute im ungeladenen Zustande gestanden hatte. Die Leitfähigkeit stieg während dieser Zeit etwas an, und kehrte zum ursprünglichen Werte erst dann zurück, nachdem im Gase durch eine längere Zeit hindurch ein elektrisches Feld hergestellt war. Ähnlich stieg sie auch an, wenn die Luft im Elektroskop über die Nacht während ca. 14 Stunden gestanden hatte (Kurve III). Es handelt sich wahrscheinlich um eine Erscheinung, welche derjenigen in frisch bereiteten Gasen analog ist. Schwieriger ist es aber hier die Quelle des Ursprungs der trägen Ionen aufzufinden. Möglich wäre es, daß bei der Ionisierung der Luft neben den gewöhnlichen auch diese wenig beweglichen und sich schwer rekombinierenden Ionen entstehen. Während einer halben Stunde entstanden bei der Ionisation durch harte γ -Strahlen so viele, daß die durch sie bedingte Leitfähigkeit ca. $\frac{785-762}{762} = 3$ Proz. der Leitfähigkeit infolge gewöhnlicher Ionen betrug. Ob es sich um eine neue Art von trägen Ionen sui generis handelt, oder ob es vielleicht suspendierte Staubteilchen sind, die ihre Ladung den gewöhnlichen Ionen verdanken, müssen neue Versuche entscheiden. Der zweiten Möglichkeit steht im Wege der Umstand, daß die Luft beim Einfüllen in das Elektroskop durch destilliertes Wasser und konzentrierte H_2SO_4 getrieben wurde und durch zwei Stöpsel aus Glaswolle filtriert war.

Zum Schluß erfülle ich eine angenehme Pflicht, indem ich meinem Chef, dem Vorstand des k. k. Physikalischen Instituts der böhmischen Universität, Hrn. Hofrat Prof. Dr. Strouhal, der mir die Mittel zur Ausführung dieser Arbeit bereitwilligst zur Verfügung stellte, meinen besten Dank ausspreche.

Prag, k. k. Physik. Inst. der böhm. Univ., Oktober 1905.

(Eingegangen 2. November 1905.)

5. *Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen; von W. Wien.*

(Aus der Wüllner-Festschrift mit einigen Zusätzen.)

Die Energie der Röntgenstrahlen ist zuerst von Dorn¹⁾, später von Rutherford²⁾ und Schöps³⁾ bestimmt worden, Leininger⁴⁾ vermochte dagegen keine Wärmewirkung zu beobachten. Um diese Versuche aufzuklären, unternahm ich die Bestimmung der Wärmewirkung der Röntgenstrahlen im Verhältnis zur Energie der erzeugenden Kathodenstrahlen, zumal sich hieraus Schlüsse auf die Impulsbreite der Röntgenstrahlen ziehen lassen. Schließlich untersuchte ich auch die Energie der wieder von den Röntgenstrahlen erzeugten Sekundärstrahlen, die sich freilich nur indirekt bestimmen läßt unter der Voraussetzung, daß es Kathodenstrahlen sind und unter Benutzung der von Dorn angegebenen Werte der Geschwindigkeit.

Ich hielt es für zweckmäßig, zwei voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung der Wärmewirkung zu benutzen, und wandte sowohl das Bolometer als die Thermosäule an. Rutherford erhebt zwar Bedenken gegen die Verwendung der letzteren, indem er meint, daß die Wärmeabgabe aus dem Innern der Thermosäule, wo die Röntgenstrahlen absorbiert werden, in anderer Weise erfolgen müsse als die Ableitung der oberflächlich absorbierten Wärmestraahlen, die man zum Zweck der Eichung auffallen läßt. Mir hat diese Meinung nicht eingeleuchtet, da die Absorption der Röntgenstrahlen in Metallen auch nicht in der Nähe der Oberfläche geschieht und die Empfindlichkeit der von mir benutzten Thermosäule, die aus 30 aneinandergefügtten Antimon-Wismutelementen bestand, in Luft genau so groß war wie im hohen Vakuum. Zu dem

1) E. Dorn, Wied. Ann. 63. p. 160. 1897.

2) E. Rutherford, Phys. Zeitschr. 2. p. 53. 1900.

3) Schöps, Inauguraldiss. Halle 1899.

4) F. Leininger, Phys. Zeitschr. 2. p. 691. 1900.

Zweck bestrahlte ich die in eine weite Glasröhre geschlossene Thermosäule mit einer Glühlampe, einmal wenn Luft in der Röhre, dann wenn ein hohes Vakuum erzeugt wurde. Die Galvanometerausschläge waren dieselben. Es geht hieraus hervor, daß die Luftleitung, an die man für die Oberflächenabgabe der Wärme zuerst denken mußte, keine Rolle spielt. Schließlich hat sich dann auch gezeigt, daß die Ergebnisse mit dem Bolometer mit denen, welche die Thermosäule gab, so weit übereinstimmten, als man erwarten kann.

Eine wesentliche Unsicherheit in der Energiemessung der Röntgenstrahlen liegt darin, daß man nicht die freie Strahlung ohne absorbierende Schicht beobachten kann. Ich habe mir viel erfolglose Mühe gegeben, diese Unsicherheit wenigstens herabzudrücken. Deshalb versuchte ich anfangs die Thermosäule in eine Röhre zu schieben, die mit zwei hintereinander befindlichen Aluminiumfenstern versehen war, und die Röhre ins Innere der Röntgenröhre zu bringen. Es scheiterte dies aber daran, daß es unmöglich war, die Thermosäule gegen die starke Wärmeentwicklung in der Röhre zu schützen. Auch Versuche, die Röntgenstrahlen durch Aluminiumfenster anstatt durch die Röhrenwand gehen zu lassen, führten zu keinem Ergebnis, weil sich solche größere Fenster nicht wohl ohne Kitt anbringen lassen und dieser die notwendige Konstanz des Vakuums zu sehr beeinträchtigt.

Ich war daher gezwungen zur Benutzung einer gewöhnlichen Röntgenröhre zurückzukehren und die Absorption der Wand besonders zu bestimmen, wobei allerdings die selektive Absorption außer acht gelassen werden mußte. Die Bestimmung der Energie der erzeugenden Kathodenstrahlen geschah kalorimetrisch. Benutzt wurde eine Röhre von Müller in Hamburg, wo die Antikathode eine Glasröhre mit eingeschmolzenem Platinboden ist. Diese Röhre diente als Kalorimetergefäß, das immer bis zu einer Marke mit Wasser gefüllt wurde. Die Temperaturerhöhung in 5 Minuten wurde an einem eingesenkten Thermometer beobachtet. Die dieser Temperaturerhöhung entsprechenden Kalorien wurden gefunden, indem eine gleiche durch einen galvanischen Strom hervorgerufen wurde, der durch eine eingesenkte Spule floß und dessen Wattverbrauch bestimmt wurde.

Die Müllersche Röhre besitzt eine leidlich funktionierende Vorrichtung zur Regulierung des Vakuums, indem in einem Nebenrohr Kathodenstrahlen auf einem imprägnierten Glimmerplättchen Gas entwickeln. Die Spannung wurde während der Versuche konstant auf 58700 Volt gehalten, was durch eine Funkenstrecke mit Kugeln von 6 cm Radius kontrolliert wurde.

Die Spannung wurde nach den Messungen von Voigt¹⁾ aus der Funkenstrecke berechnet. Es ist natürlich möglich, daß die mit einem Induktionsapparat erzeugten Spannungen nicht ganz denselben Funkenlängen entsprechen als bei Benutzung einer Influenzmaschine. Der durch die Stromunterbrechung bedingte Anstieg der Spannung gibt möglicherweise etwas andere Funkenlängen als die mehr kontinuierlich wirkende Influenzmaschine. Der hierdurch bedingte Fehler soll besonders untersucht werden.

Die Thermosäule sowohl wie das Bolometer befanden sich in einem Zinkkasten, der eine große Öffnung zum Hindurchlassen der Röntgenstrahlen hatte. Diese Öffnung wurde durch dünnes Aluminiumblech von 0,03 mm Dicke geschlossen. Um alle Wärmewirkungen sicher auszuschließen, wurde noch ein zweites Aluminiumblatt eingeschoben. Dann zeigte ein auf mehrere hundert Grad erhitztes, geschwärztes Metallblech, das an der Stelle der Röntgenröhre sich befand, keine Einwirkung auf die Strahlungsmesser.

Als Galvanometer diente ein Siemenssches astatisches Glockengalvanometer von ca. 6 Ohm Widerstand, das gewöhnlich auf einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-9}$ Amp. pro Skalenteil gehalten wurde und dabei tagelang konstante Empfindlichkeit und auch guten Nullpunkt hielt. Obwohl dieses Instrument den du Bois-Rubensschen und Paschenschen an Empfindlichkeit etwas unterlegen ist, so ist es doch viel unempfindlicher gegen Störungen aller Art und daher in den modernen Laboratorien sehr am Platze, zumal die anderen Galvanometer selten bei einer höheren Empfindlichkeit benutzt werden.

Bei dieser Empfindlichkeit gab die Thermosäule, deren Fläche 1,4 qcm betrug, einen Ausschlag von 30—40 mm durch die Einwirkung der Röntgenstrahlen. Nicht viel größer war der

1) E. Voigt, Ann. d. Phys. 12. p. 385. 1903.

Ausschlag des Bolometers, obwohl seine Fläche 225 qcm betrug. Das letztere konnte, sollte der Nullpunkt konstant bleiben, nur mit schwachem Strome benutzt werden.

Die Röntgenröhre wurde mit einem 40 cm-Induktorium und Turbinenunterbrecher betrieben. Die Zahl der Unterbrechungen betrug 32 in der Sekunde.

Das Bolometer war nach Art der Lummer-Kurlbaumschen Flächenbolometer aus 0,03 mm dickem und 5 mm breitem Platinblech hergestellt, bei dem zwei Zweige der Wheatstoneschen Brücke bestrahlt werden. Die Streifen sind so angeordnet, daß die Streifen des einen Zweiges die Lücken des anderen decken. Die beiden anderen Widerstände mußten aus ebensolchem Blech in gleichen Abmessungen hergestellt werden, weil sich sonst der Nullpunkt nicht konstant hielt. Geeicht wurden sowohl Bolometer als Thermosäule durch die Strahlung eines schwarzen Körpers von 100°. Bei einer Empfindlichkeit von $1,9 \cdot 10^{-9}$ Amp. des Galvanometers, 188 Skt. der Empfindlichkeitsmessung, entsprach einem Skalenteil

$$5,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}} \text{ pro Quadratzentimeter}$$

aufgefallene Strahlung der Thermosäule.

Bei der Röntgenröhre betrug die Entfernung des Zentrums der Antikathode von der Thermosäule 13,5 cm.

Die Messung wurde so gemacht, daß eine Bleiplatte zwischen Röntgenröhre und Thermosäule geschoben wurde. Es wurde die Ablenkung am Galvanometer beobachtet, die beim Fortziehen der Bleiplatte eintrat.

Eine Beobachtungsreihe ergab die folgenden Werte.

Die Zahlen bedeuten, wenn r die Entfernung von der Antikathode bedeutet,

$$\frac{2\pi r^2 \times \text{Skalenteile der Röntgenstrahlung}}{\text{Temperaturerhöhung im Kalorimeter} \times \text{Skalenteile Empf.}} \text{ bei einer Empfindlichkeit}$$

$$\frac{188}{288} \cdot 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ Amp.}$$

10,0

10,4

8,8

8,6

8,7

9,3

Andere Reihen ergaben nur wenig abweichende Werte.

Unter Berücksichtigung der Empfindlichkeit der Thermosäule und des Galvanometers ergibt sich, da die Temperaturerhöhung durch die Kathodenstrahlen um 1° in 5 Minuten

$$0,103 \frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}}$$

entsprach, für die

$$\frac{\text{Energie der Röntgenstrahlen}}{\text{Energie der Kathodenstrahlen}} = 9,17 \cdot 10^{-4} = \frac{E_r}{E_k} = \frac{5,4 \cdot 188 \cdot 9,3 \cdot 10^{-8}}{0,103}.$$

Streng genommen wird bei der Wärmewirkung $E_k - E_r$ gemessen, doch ist eben E_r gegen E_k zu vernachlässigen.

Hier ist noch die Korrektur für die Absorption in der Röhrenwand anzubringen.

Die Absorption in der Röhrenwand wurde nach zwei Methoden bestimmt. Erstens wurde ein Stück Glas von einer ähnlichen Röhre vor die Thermosäule geschoben und die Verringerung des Ausschlages beobachtet.

Dann wurden durch eine andere Röhre von nahe gleicher Spannung Röntgenstrahlen erzeugt, die auf einer im Vakuum befindlichen Platte Sekundärstrahlen erzeugten.

Es wurde nun die gewöhnlich benutzte Röntgenröhre vor die Sekundärröhre geschoben und die Verringerung der erzeugten Sekundärstrahlung gemessen, worauf wir weiter unten noch näher eingehen werden. Hier erfolgt die Absorption der Röntgenstrahlen in beiden Glaswänden der Röhre und sie wurde unter Voraussetzung homogener Strahlung auf eine Glaswand reduziert.

Die so gewonnenen Resultate stimmten bis auf wenige Prozent mit den nach ersterer Methode erhaltenen überein. Hiernach gehen 68 Proz. der Röntgenstrahlen durch die eine Wand der Röntgenröhre. Durch diese Zahl ist der Wert von E_r/E_k zu korrigieren. Wir erhalten so

$$\frac{E_r}{E_k} = 1,35 \cdot 10^{-3}.$$

Während bei der Thermosäule alle Röntgenstrahlen absorbiert werden, ist dies beim Bolometer nicht der Fall. Erstens geht ein Teil der Strahlen durch das Platinblech, dann ein weiterer durch die Lücken der nicht genau sich

deckenden Streifen. Die Menge Röntgenstrahlen, die durch das Bolometer geht, wurde ebenfalls mit der Sekundärstrahlröhre bestimmt. Bei der großen Ausdehnung der Bolometerfläche wurde die durchgegangene Strahlung an verschiedenen Stellen bestimmt und der Mittelwert genommen.

Es fand sich, daß das Bolometer 24 Proz. im Mittel hindurchläßt. Die bolometrischen Beobachtungen ergaben für

$$\frac{2 \pi r^2 \text{ Skalenteile}}{\text{Skalenteile Empf.} \times \text{Temperaturerhöhung}} = 7,5,$$

wenn die Empfindlichkeit des Galvanometers auf die bei der Thermosäule reduziert war. Hieraus berechnet sich

$$\frac{E_r}{E_k} = 1,09 \cdot 10^{-3}.$$

Die Abweichung von dem mit Hilfe der Thermosäule erhaltenen Wert ist nicht größer als die Fehler der einzelnen Beobachtungen, die hauptsächlich durch die Inkonstanz des Unterbrechers bedingt waren.

Trotz der etwas geringeren Empfindlichkeit halte ich die Beobachtungen mit der Thermosäule für die zuverlässigeren, weil die Konstanz des Nullpunktes eine größere war und vor allem die Korrektion wegen der Durchlässigkeit des Bolometers fortfällt.

Die gesamte Energie der Röntgenstrahlen beträgt für eine Temperaturerhöhung von $10,8^\circ$ des von den Kathodenstrahlen erwärmten Kalorimeters, also 1,15 g-Kal./sec Kathodenstrahlenenergie,

$$E_r = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g-Kal.}}{\text{sec}},$$

eine Zahl, die mit der von Dorn gefundenen nahe übereinstimmt mit dem Unterschiede, daß hier 32 Unterbrechungen in der Sekunde erfolgten, bei Dorn nur fünf. Den Grund der negativen Ergebnisse von Leininger habe ich nicht mit Sicherheit auffinden können, zumal die von ihm benutzte Röntgenröhre zerstört ist. Das von ihm benutzte Bolometer war dem meinigen ganz ähnlich. Möglicherweise war die Anzahl der Unterbrechungen für die gebrauchte Röhre nicht groß genug.

Die Abhängigkeit der Energie der Röntgenstrahlen von der Spannung und von der Art und Zahl der Unterbrechungen soll der Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein.

Wir können den gefundenen Wert für das Verhältnis der Energie der Röntgenstrahlen zu der der Kathodenstrahlen benutzen, um die Impulsbreite der Röntgenstrahlen zu berechnen.¹⁾

Hierbei treten die Unsicherheiten in den Grundlagen der Elektronentheorie insofern hervor, als es zweifelhaft bleibt, ob man die Gestalt der Elektronen als unabhängig von der Bewegung annehmen soll oder ob man ihnen die Gestalt eines Heavisideschen Ellipsoids, das sich mit der Geschwindigkeit ändert, zuzuweisen hat.

Obwohl die letztere Annahme die größere Wahrscheinlichkeit für sich hat, ist die Theorie für diesen Fall noch nicht so weit ausgebildet, um die Strahlung eines verzögerten Elektrons für Geschwindigkeiten zu berechnen, die nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegen. Die von mir aufgestellte Bedingung, daß $\frac{v}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$ klein gegen 1 sei, ist bei den vor-

liegenden Beobachtungen nicht mehr erfüllt.

Ist dagegen die Gestalt des Elektrons unveränderlich, so ist nach Wiechert²⁾ die Bedingung zu erfüllen, daß bei kugelförmiger Gestalt des Elektrons vom Radius R der Bewegungszustand sich in der Zeit $2R/(c-v)$ durch die Verzögerung j nur wenig ändert, so daß $(2R/c-v)j$ klein gegen v sein muß, wenn c die Lichtgeschwindigkeit und v die Elektronengeschwindigkeit bezeichnen.

Aus der Formel

$$R = \frac{2}{3} e \cdot \frac{e}{m}$$

berechnet sich, wenn wir für das Elementarquantum nach Thomson $e = 3,4 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische $= 1,13 \cdot 10^{-20}$ elektromagnetische Einheiten und für $e/m = 1,87 \cdot 10^7$ elektromagnetische Einheiten setzen

$$R = 1,415 \cdot 10^{-18} \text{ cm.}$$

1) Vgl. J. Larmor, Phil. Mag. (5) 44. p. 503. 1897.

2) E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze. Jubelband für H. A. Lorentz, 1900.

Es wird sich zeigen, daß bei dieser Kleinheit des Radius die erwähnte Bedingung angenähert erfüllt ist.

Für die Ausstrahlung eines mit der Geschwindigkeit v fliegenden Elektrons, das während dt um $j dt$ in seiner Geschwindigkeit verzögert wird, ist zuerst von Abraham¹⁾ der Ausdruck abgeleitet

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 \cdot \frac{dt}{k^3},$$

wo $k^2 = 1 - v^2/c^2$ ist.

Bei gleichförmiger Verzögerung ist

$$l = \frac{j}{2} t^2.$$

Wird das Elektron auf der Strecke l von $v = v_0$ bis auf $v = 0$ verzögert, so ist $v_0^2 = 2jl$, also

$$dt = \frac{dv}{j} = \frac{dv}{v_0^2} \cdot 2l,$$

so daß wir für die während der ganzen Verzögerung von einem Elektron ausgestrahlte Energie den Wert erhalten

$$\frac{4l e^2 j^2}{3 c^3 v_0^2} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{v_0^3 e^2}{24 c^3 l} \left\{ \frac{2 + 3 k_0^2}{k_0^4} + \frac{3}{2} \frac{c}{v} \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} \right\},$$

$$k_0^2 = 1 - \frac{v_0^2}{c^2}.$$

Die Geschwindigkeit v_0 berechnen wir aus dem bekannten Werte von e/m und der Spannung $V = 58700$ Volt.

Die Energie eines Elektrons von der Geschwindigkeit v_0 ist bei Oberflächenladung

$$\frac{e^2}{2R} \left\{ \frac{c}{v_0} \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} - 1 \right\}.$$

Hiervon ist die Energie des ruhenden Elektrons

$$E = \frac{e^2}{2R}$$

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 105. 1903.

abzuziehen, um die Bewegungsenergie zu erhalten. Diese ist also

$$\frac{e^2}{2R} \left\{ \frac{c}{v_0} \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} - 2 \right\}$$

gleich der geleisteten Arbeit $V e$. Setzen wir für

$$R = \frac{2}{3} \frac{e \cdot e}{c^2 m},$$

so wird

$$\left(\frac{4}{3} \frac{V e}{c^2} + 2 \right) \frac{v_0}{c} = \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}},$$

für den angegebenen Wert von V ergibt sich

$$v_0 = 1,38 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Die Energie der Kathodenstrahlen ist nun, wenn in der Sekunde N Elektronen aufprallen,

$$E_k = N V e,$$

woraus

$$N = \frac{E_k}{V e}.$$

Die Impulsbreite hängt von der Richtung der ausgesandten Welle ab. Sie ist $\lambda = 2l/c/v$ in der Richtung senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Elektrons. In der der Bewegungsrichtung entgegengesetzten Richtung muß die Rückseite des Impulses noch die Strecke l durchlaufen, so daß die Impulsbreite hier

$$\frac{2lc}{v} + l = l \left(1 + \frac{2c}{v} \right)$$

beträgt. In dieser Richtung ist aber die ausgestrahlte elektromagnetische Energie Null.

Bildet die Richtung der Welle den Winkel α mit der Bewegungsrichtung, so ist die Impulsbreite

$$l \left(\cos \alpha + \frac{2c}{v} \right).$$

Also muß die Strahlung schon bei ganz gleichmäßiger Ver-

zögerung und vollkommen gleichen Geschwindigkeiten aller Elektronen inhomogen sein. Für die Impulsbreite $\lambda = 2lc/v_0$ ist

$$\lambda = \frac{E_k}{E_r} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{v_0^2 c}{12 c^2} \left\{ \frac{2 + 3 k_0^2}{k_0^4} + \frac{3}{2} \frac{c}{v_0} \log \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} \right\}.$$

Setzen wir den gefundenen Wert von E_k/E_r ein, so erhalten wir

$$\lambda = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ cm.}$$

Wir haben hier für E_r die wirklich ausgesandten Röntgenstrahlen gesetzt. Da sich aber die Röntgenwellen ebenso gut in die Antikathode hinein ausbreiten, so ist es richtiger für die Berechnung der Impulsbreite den Wert für E_r zu verdoppeln. Dann wird

$$\lambda = 1,15 \cdot 10^{-10} \text{ cm.}$$

Sommerfeld¹⁾ hat aus den Beobachtungen von Haga und Wind berechnet

$$\lambda = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm,}$$

also über 100 mal so groß. Wie weit die Inhomogenität der Röntgenstrahlen hierbei in Frage kommt, läßt sich schwer übersehen.

Im übrigen hat unsere Rechnung die Voraussetzung, daß die Erwärmung durch die Röntgenstrahlen wirklich die Energie dieser mißt.

Da die Röntgenstrahlen an den Körpern, auf die sie treffen, Sekundärstrahlen erzeugen, so schien es mir von Wichtigkeit, auch die Energie dieser zu untersuchen.

Eine einfache Überlegung ergibt, daß diese im Vergleich zur Energie der Röntgenstrahlen nur gering sein kann. Denken wir uns eine große Anzahl dünner Platinfolien aufeinander gelegt und von Röntgenstrahlen durchstrahlt, so werden an allen Sekundärstrahlen erzeugt werden, soweit die Röntgenstrahlen überhaupt eindringen können. Fast alle diese Strahlen

1) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46. p. 93. 1902; Physik. Zeitschr. 2. p. 59. 1902.

werden aber wieder absorbiert, weil ja die Absorption von Kathodenstrahlen viel größer ist als die von Röntgenstrahlen.

Es scheint mir nicht unmöglich zu sein, daß die Absorption der Röntgenstrahlen überhaupt nur indirekt dadurch erfolgt, daß Sekundärstrahlen erzeugt werden. Es erscheint von vornherein nicht ausgeschlossen, daß die Röntgenstrahlen, ebenso wie sie von Elektronen erzeugt werden, nun ihrerseits nur auf Elektronen wirken.

Würde man die Absorptionsgesetze der Kathodenstrahlen und die Eigenschaften der Sekundärstrahlen näher kennen, so würde sich diese Hypothese prüfen lassen. Denn wenn alle Energie der Röntgenstrahlen in solche von Sekundärstrahlen verwandelt wird, so könnte man die erzeugte Menge Sekundärstrahlen berechnen, sobald man ihre Geschwindigkeit kennen würde. Wenn man nun das Absorptionsgesetz der Sekundärstrahlen ebenfalls kennen würde, so ließe sich berechnen, wie viel der erzeugten Sekundärstrahlen wieder an die Oberfläche gelangt. Diese Menge ließe sich mit der beobachteten vergleichen. Wir wollen eine solche Rechnung anstellen unter der Voraussetzung, daß die in der Tiefe x von der Oberfläche erzeugten Sekundärstrahlen nach dem Gesetz e^{-kx} absorbiert werden. Doch können wir von der Energie der Röntgenstrahlen nur die Hälfte in Ansatz bringen, da jedenfalls ebensoviel Sekundärstrahlen nach vorwärts wie nach rückwärts gehen.

Da jedenfalls nur aus sehr geringer Tiefe Sekundärstrahlen nach außen gelangen können, wird von der Intensität der auffallenden Röntgenstrahlen nur ein kleiner Teil für diese in Betracht kommen. Ist J_r die Intensität der Röntgenstrahlen pro Flächeneinheit, so ist in geringer Tiefe x die Intensität

$$J_r e^{-k_r x} = J_r (1 - k_r x).$$

$J_r k_r x$ ist also die absorbierte Menge Röntgenstrahlen. In der Schicht von der Dicke dx wird also $J_r k_r dx$ in Sekundärstrahlen verwandelt. Davon soll die Hälfte nach rückwärts gehen. Von den zwischen x und $x + dx$ erzeugten Sekundärstrahlen gelangt der Bruchteil $e^{-k_e x}$ nach außen; also von dieser Schicht

$$\frac{J_r}{2} k_r dx e^{-k_e x}.$$

Dies ist von 0 bis ∞ zu integrieren. Die Energie der austretenden Sekundärstrahlen ist also

$$\int_0^{\infty} \frac{J_r}{2} k_r dx \cdot e^{-k_k x} = \frac{J_r}{2} \frac{k_r}{k_k},$$

also

$$\frac{J_s}{J_r} = \frac{1}{2} \frac{k_r}{k_k},$$

wo im Zähler J_r gegen J_s vernachlässigt ist.

Da das Absorptionsgesetz der Kathodenstrahlen sicher ein ganz anderes ist, so können wir nur eine rohe Annäherung an die Wirklichkeit erwarten.

Die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen ist nach Dorn recht verschieden und infolgedessen ist auch die Absorption, die ja in hohem Maße von der Geschwindigkeit abhängt, unsicher.

Nimmt man nach den Beobachtungen von Seitz¹⁾ einen Absorptionskoeffizienten $k_k = 225000$ für Platin an, der der Geschwindigkeit $6,8 \cdot 10^9$ nach Dorn²⁾ ungefähr entsprechen würde, und für k_r nach Holtsmark 1000, so hätten wir für $J_s/J_r = 1/500$.

Die Beobachtungen der Sekundärstrahlen geschahen nach einer ähnlichen Methode wie die von Holtsmark.³⁾ Die auf der Platinplatte aufgefangene positive Elektrizität wurde nach drei verschiedenen Methoden bestimmt. Einmal ging der Strom durch einen hohen Widerstand zur Erde und die stationäre Spannung wurde an einem Elektrometer abgelesen. Dann wurde die Spannung bestimmt, zu welcher ein Plattenkondensator von etwa 10^4 cm in bestimmter Zeit geladen wurde. Endlich wurde die Elektrizitätsmenge nach der von Harms⁴⁾ angegebenen Methode bestimmt. Alle drei Bestimmungen führten zu übereinstimmenden Ergebnissen.

Es muß noch erwähnt werden, daß bei dieser Methode die Sekundärstrahlen zu messen, die von den Glaswänden der

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 6. p. 1. 1901; 12. p. 860. 1903; Physik. Zeitsch. p. 395. 1904.

2) E. Dorn, Jubelband für H. A. Lorentz, 1900.

3) G. Holtsmark, Ann. d. Phys. 10. p. 522. 1903.

4) F. Harms, Ann. d. Phys. 10. p. 816. 1903.

Röhre ausgesandten Sekundärstrahlen teilweise das Platinblech treffen müssen und daher dessen positive Ladung verkleinern. Nach Curie und Sagnac sendet Glas diese Strahlen allerdings lange nicht in der Menge aus wie Platin. Es sollen jedoch besondere Versuche das Verhältnis des Emissionsvermögens von Platin zu Glas bestimmen.

Das Elektrometer war ein Dolezaleksches mit Bernsteinisolation der Quadranten. Von größter Wichtigkeit bei diesen Versuchen ist das Fernhalten der durch Röntgenstrahlen leitend gemachten Luft von allen mit dem Elektrometer verbundenen Metallteilen.

Bei einer Temperaturerhöhung des Kalorimeters von im Mittel 38° ergab sich ein Strom von $1 \cdot 10^{-11}$ Amp. Setzen wir nach Dorn die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen $6,8 \cdot 10^9$, so entspricht das einer Energie von $1,24$ Erg/sec oder $2,97 \cdot 10^{-6}$ g-Kal./sec.

Andererseits war die Größe des Platinbleches, auf dem die Sekundärstrahlen erzeugt wurden, 42 qcm. Es befand sich in einer Entfernung von $31,8$ cm von der Antikathode.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß ein Teil der Röntgenstrahlen in der Wand der Sekundärstrahlröhre absorbiert wird. Um diesen Teil zu bestimmen, wurde die Röhre zwischen Thermoskule und Röntgenröhre gebracht. Es ergab sich, daß eine Wand der Röhre 75 Proz. der Strahlen hindurchläßt. Aus diesen Zahlen berechnet sich die Energie der auffallenden Röntgenstrahlen zu $1,6 \cdot 10^{-5}$ g-Kal./sec, so daß das Verhältnis zur Sekundärstrahlung $E_r/E_s = 530$ wird.

Die Übereinstimmung mit dem aus den Absorptionskoeffizienten gefundenen ist natürlich eine rein zufällige, da wir ebenso gut den Wert für den Absorptionskoeffizienten der Kathodenstrahlen anders hätten wählen können. Immerhin zeigt sich, daß die Annahme, alle Röntgenstrahlen verwandeln sich in Sekundärstrahlen, vorläufig mit den Tatsachen vereinbar ist.

Derartige Schlüsse zu ziehen wird man berechtigt sein, wenn man sich auf den zunächst natürlich erscheinenden Standpunkt stellt, daß die Energie der Sekundärstrahlen den Röntgenstrahlen entnommen wird.

Geht man aber auf den Mechanismus dieser Verwandlung näher ein, so zeigen sich bedeutende Schwierigkeiten, um ein-

zusehen, woher die große Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen stammt.

Wir können zunächst leicht die Geschwindigkeit berechnen, welche einem Elektron durch eine Röntgenwelle, die von der Bremsung eines Elektrons herrührt, erteilt wird.

Legen wir um den Erregungspunkt der Röntgenwelle eine Kugel mit dem Radius R , so ist, wenn wir das Elektron mit der anfänglichen Geschwindigkeit weiter gehen lassen, dieses um die Strecke $R(v/c)$ weitergegangen, bis die Welle die Kugel erreicht hat. Beziehen wir alles auf ein Koordinatensystem im Elektron, so ist jetzt die Gleichung der Kugel

$$\left(x + \frac{v}{c} R\right)^2 + \varrho^2 = R^2, \quad \varrho^2 = y^2 + z^2,$$

oder

$$x = R \left(\sin \vartheta - \frac{v}{c} \right),$$

$$\varrho = R \cos \vartheta.$$

Setzen wir diese Werte in meine Formeln¹⁾ ein, so erhalten wir für die Feldintensität

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_z^2} = \frac{a e b^2 k^2 \cos \vartheta}{R \left(1 - \frac{v}{c} \sin \vartheta\right)^3} = - \frac{j e \cos \vartheta}{e^2 R \left(1 - \frac{v}{c} \sin \vartheta\right)^4},$$

$$j = - a b^2 k^2 c^2.$$

Der Maximalwert für \mathfrak{E} ergibt sich hieraus für unsere Zahlen

$$\mathfrak{E} = 0,102.$$

Diese Feldstärke wirkt beschleunigend auf ein Elektron nach der Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \mathfrak{E},$$

woraus

$$v = \frac{e}{m} \mathfrak{E} \tau \text{ folgt, } \tau = \frac{v_0}{j}.$$

Um den Maximalwert der erreichten Geschwindigkeit zu erhalten, müßten wir die Variation des Zeitintegrals von \mathfrak{E} gleich Null setzen und hieraus ϑ und dann die für dieses ϑ erreichte Geschwindigkeit berechnen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 13. p. 655. 1904.

Für den vorliegenden Zweck genügt es vollständig, einen Mittelwert für \mathcal{E} anzunehmen, indem wir das Mittel aus dem größten Wert von \mathcal{E} und demjenigen nehmen, auf den \mathcal{E} an dieser Stelle sinkt, wenn $v = 0$ geworden ist, $\mathcal{E} = 0,0256$. Dieser ist

$$\mathcal{E} = 0,0638.$$

Die von der Röntgenwelle einem Elektron mitgeteilte Geschwindigkeit ist hiernach

$$v = \frac{e}{m} \mathcal{E} \frac{r_0}{j} = \frac{e}{m} \frac{\mathcal{E} \lambda}{c},$$

woraus

$$v = 1,37 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

folgt. Die Anzahl der in der Sekunde verzögerten Elektronen, durch welche die Röntgenwellen entstanden, war

$$N = \frac{E_k}{V e} = 7,2 \cdot 10^{14}.$$

Damit durch Beschleunigung durch die Röntgenwellen die Geschwindigkeit $v = 10^9$ cm/sec erreicht werde, müßten die in 0,01 Sek. auffallenden Elektronen zusammenwirken.

Es ist daher ausgeschlossen, daß die Sekundärstrahlen durch direkte Beschleunigung durch die Röntgenwelle ihre Geschwindigkeit erhalten.

Aus diesem Grunde scheint mir auch nicht möglich zu sein, daß die Sekundärstrahlen aus den freien Elektronen im Metall, welche die Leitfähigkeit bedingen, entnommen werden.

Die einzige Möglichkeit, die großen Geschwindigkeiten der Sekundärstrahlen zu erklären, scheint mir in der Möglichkeit zu liegen, daß Elektronen im Atom im Zustande labilen Gleichgewichtes dadurch sich befinden, daß die Anziehung des positiven Atoms die Abstoßung negativer Elektronen nahe ausgleicht. Durch die Wirkung einer Anzahl aufeinander folgender Röntgenwellen, deren Wirkung ja immer in derselben Richtung erfolgt, kann ein Elektron mehr in die Abstoßungssphäre anderer Elektronen gedrängt werden, wodurch ein Hinausstoßen erfolgen muß.

Dann stammt allerdings die Energie der Sekundärstrahlen direkt aus der Atomenergie und wir wissen in diesem Fall nicht, ob die als Erwärmung gemessene Energie überhaupt

die Energie der Röntgenstrahlen ist.¹⁾ Denn der größte Teil der ausgesandten Sekundärstrahlen wird wieder absorbiert und würde eine Verwandlung der Atomenergie in Wärme bedeuten.

Eine derartige Energieabgabe der Atome würde eine Veränderung dieser nach sich ziehen müssen, die dem Verhalten der radioaktiven Stoffe analog wäre.

Möglich ist aber auch, daß die in den Atomen absorbierten Röntgenwellen die Energie der ausgesandten Sekundärstrahlen deckt, was die Unveränderlichkeit der Atomenergie gewährleisten und mit der oben ausgesprochenen Hypothese zusammenfallen würde.

Daß die große Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen etwa in den Elektronen der Atome vorhanden sein könnte, erscheint ebenfalls unmöglich. Eine einfache Rechnung zeigt nämlich, daß bei so großen Geschwindigkeiten, bei denen sich doch die Elektronen, um im Atom zu bleiben, auf sehr stark gekrümmten Bahnen bewegen müssen, eine so bedeutende Energieausstrahlung eintreten muß, daß die Bewegungsenergie in kurzer Zeit dadurch vernichtet wird.

Bei transversaler Beschleunigung j ist die während dt ausgestrahlte Energie

$$E = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 \frac{dt}{k^4}.$$

Nehmen wir für das Elektron eine Kreisbahn an, in der es durch die anziehende Kraft eines gleich großen positiven Teilchens e gehalten wird,

$$\frac{e^2}{r} = \frac{e e_1}{m} \frac{1}{r^2}.$$

Während einer Umlaufdauer T wird die Energie ausgestrahlt

$$E = \frac{2}{3} \frac{e^2 e_1^2}{c^3 m^2} \frac{1}{r^4} \frac{1}{k^4} T,$$

und weil

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m r^3}{e e_1}}$$

ist

$$E = \frac{4\pi}{3} \frac{e^3}{c^3 k^4} \sqrt{\frac{e^3 e_1^3}{m^3 r^5}}.$$

1) Es mag von diesem Standpunkt aus zweifelhaft erscheinen, ob auch die durch Lichtstrahlung erzeugte Wärme immer die Strahlungsenergie mißt oder ob auch hier Atomenergie mitwirkt, eine Auffassung, zu der man sich erst im äußersten Notfall bekennen wird.

Nehmen wir $r = 10^{-7}$ cm, so ist

$$T = 1,4 \cdot 10^{-14} \quad \text{und} \quad v = 4,37 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Aber schon bei dieser Geschwindigkeit beträgt die Ausstrahlung $1,5 \cdot 10^{-20}$ Erg, also nahezu $1 \cdot 10^6$ Erg in der Sekunde. Andererseits ist die Bewegungsenergie nur

$$\frac{m}{2} v^2 = 5,78 \cdot 10^{-13} \text{ Erg.}$$

Würzburg, Phys. Institut, November 1905.

(Eingegangen 27. November 1905.)

**6. Über Energie und spezifische Wärme in der
Nähe der kritischen Temperatur;
von Max Reinganum.**

Es ist vielleicht von Interesse, die Resultate, welche sich für die Änderung der spezifischen Wärme mit dem Volumen nach den kalorimetrischen Versuchen von Hrn. Dieterici ergeben ¹⁾, mit denjenigen zu vergleichen, die sich thermodynamisch aus den vorliegenden Isothermenbestimmungen ableiten lassen.

Indem ich diesen Vergleich durchführe, benutze ich eine früher angewandte Darstellung der inneren Energie ²⁾, durch welche die Änderung des Energieinhalts einer Flüssigkeit oder eines Gases mit Volumen und Temperatur übersichtlich dargestellt werden kann. Ich erlaube mir, auf diese Weise einen Auszug aus meiner Dissertation zu geben.

Wir definieren eine GröÙe a von der Bedeutung

$$(1) \quad a = \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) v^2,$$

wo T die absolute Temperatur, p den Druck und v das Volumen bezeichnet und a selbst noch Funktion zweier Variabeln, etwa des Volumens und der Temperatur sein kann.

Die Bezeichnung ist mit Rücksicht auf die von van der Waalssche Theorie gewählt. Legen wir nämlich für eine Flüssigkeit die Gleichung von van der Waals zugrunde

$$(2) \quad p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b}$$

mit konstanten Koeffizienten a , b und R , so müÙte, wenn man den in (1) rechts stehenden Ausdruck bildet, dieser gleich der Konstanten a der Gleichung von van der Waals sein.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 154—185. 1903.

2) M. Reinganum, Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung, Dissert. Göttingen 1899, p. 29—47.

Wenn wir daher (1) empirisch für möglichst viele Punkte der experimentell bekannten Isothermennetze bilden, erhalten wir in der Veränderlichkeit von a ein Maß für die Abweichungen von der van der Waalsschen Formel, und zwar in bezug auf die kalorischen Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen.

Die Konstante a hängt in folgender Weise mit der Energie zusammen. Bezeichnet U den Energieinhalt, und gehen wir von der Formel der Thermodynamik aus:

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p,$$

so ist wegen (1)

$$(4) \quad a = - \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{1}{v} \right)}.$$

Der Differentialquotient des Energieinhalts nach der Dichte sollte also nach der van der Waalsschen Theorie konstant sein, er ergibt sich aber, wie gezeigt werden soll, in der Nähe der kritischen Temperatur als merklich abhängig von v und T .

Differenziert man (3) nach der Temperatur, so folgt mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial T} = \frac{\partial c_v}{\partial v}$$

ist, wenn c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bezeichnet, erstens die Formel der Thermodynamik

$$(5) \quad \frac{\partial c_v}{\partial v} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2},$$

und zweitens wegen (1) und (4)

$$(6) \quad \frac{\partial a}{\partial T} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} v^2 = - \frac{\partial c_v}{\partial \left(\frac{1}{v} \right)}.$$

Die Einführung der Größe a , die über verhältnismäßig große Gebiete konstant ist, kommt also rein praktisch genommen darauf hinaus, daß man Differentialquotienten von U und c_v nach der Dichte statt solcher nach dem Volumen einführt.

Integration von (4) ergibt den Energieinhalt für das Volumen v und die Temperatur T zu:

$$(7) \quad U = \int_{\frac{1}{v}}^0 a \cdot d\left(\frac{1}{v}\right) + \int_0^T c_{\infty} \cdot dT + C, ^1)$$

wo c_{∞} die spezifische Wärme bei konstantem Volumen in sehr großer Verdünnung und C eine Konstante bedeutet.

Ist a als Funktion des Volumens und der Temperatur bekannt und ferner die spezifische Wärme bei großer Verdünnung gemessen, so kann durch Differentiation von (7) nach der Temperatur auf die spezifische Wärme c_v für irgend einen Punkt der Isothermen geschlossen werden.

Im folgenden teile ich einen Teil der Resultate meiner früheren Berechnungen über die Veränderung von a mit dem Volumen mit, soweit sich diese Rechnungen auf die Nähe der kritischen Temperatur beziehen, und ergänze dieselben in bezug auf die Abhängigkeit von a von der Temperatur. Schließlich sei eine Beziehung zwischen a und $\partial a / \partial T$ mitgeteilt.

I. Die Abhängigkeit von a vom Volumen.

Den Berechnungen liegt das Material von Ramsay und Young, Amagat und Young zugrunde. Die Maßeinheiten der betreffenden Arbeiten sind beibehalten.

1. Äthyläther.²⁾

v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 \cdot 10^{-3}$	v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 \cdot 10^{-3}$
300	5320	5,0	3047
250	6563	4,0	2656
200	6420	3,7	2534
150	6075	3,3	2414
100	5720	3,0	2366
50	5193	2,5	2487
30	4871	2,2	2590
20	4554	2,0	2691
10	3908		

1) Über diese Gleichung siehe G. Bakker (Zeitschr. f. phys. Chem. 18. p. 519. 1895) und W. Nernst (Theoretische Chemie, 4. Aufl., p. 241 bis 242. Stuttgart 1900).

2) W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 1887. p. 56.

Das Volumen ist in Kubikzentimeter pro Gramm, der Druck in Millimeter Quecksilber gemessen. Da die Autoren den Druck als lineare Funktion der Temperatur darstellen, so wird a übrigens unabhängig von der Temperatur, so daß über $\partial a / \partial T$ aus den Tabellen der Verfasser nichts ausgesagt werden kann. a ist wie durchgängig für große Volumina ziemlich konstant. Die Schwankungen fallen hier in die Grenze der Versuchsfehler. Das Mittel von a für die fünf größten Volumina ist $6021 \cdot 10^3$. Mit kleiner werdendem Volumen nimmt a bis zu einem Minimumwert in der Nähe des Volumens $3,0 \text{ ccm ab}$, um bei noch kleineren Volumina wieder zu steigen.

2. Kohlensäure nach Amagat.¹⁾

v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2$
0,02385	0,01842
0,01636	0,01263
0,01300	0,01240
0,01000	0,01185
0,00768	0,01081
0,00578	0,00956
0,00428	0,00814
0,00316	0,00776
0,00250	0,00739
0,00200	0,00911
0,00187	0,00925

3. Äthylen nach Amagat.

v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2$
0,16666	0,01325
0,011250	0,01301
0,008333	0,01066
0,006428	0,01018
0,005000	0,00919
0,004166	0,00882
0,003500	0,00939
0,003000	0,01057
0,002857	0,00995

Bei Kohlensäure und Isopentan ist das Volumen in Bruchteilen des Volumens bei 0° und Atmosphärendruck, der Druck in Atmosphären gemessen. Die Temperatur ist etwa 10° über der kritischen. Den Grenzwert von a erhält man graphisch, indem man a gegen $1/v$ aufträgt. Für kleine $1/v$ ist a eine nahezu gerade, gegen die Abszissenachse geneigte Linie. Die Grenzwerte ergeben sich auf diese Weise als Durchschnitt der Linie durch die Ordinatenachse zu $0,01440$ für Kohlensäure und $0,01543$ für Äthylen. Auch bei diesen Substanzen zeigt sich ein Minimum, welches nahe bei den Volumina $0,00316$ und $0,004166$ liegt.

1) Die klassische Untersuchung von Amagat ist zusammengestellt Ann. de phys. et chim. (6) 29. p. 68—136 und p. 505—574. 1893.

4. Isopentan.¹⁾

v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 \cdot 10^{-3}$	v	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right) v^2 \cdot 10^{-3}$
∞	5100	5	3170
100	5000	4	2752
50	4900	3,6	2618
20	4600	3,2	2646
16	4467	3,0	2582
12	4257	2,8	2711
10	4128	2,7	2800
9	4077	2,6	2893
8	3950	2,5	3042
7	3772	2,4	3160
6	3533		

Die Einheiten sind dieselben wie bei Äthyläther. Die Temperatur ist 5 bis 10° über der kritischen. Die a -Werte sind bei den größeren Volumina graphisch ausgeglichen. Es findet sich ebenfalls ein Minimum von a vor, daß ungefähr beim Volumen 3,2 ccm liegt.

Bildet man das Verhältnis des Minimalwertes von a zu den Grenzwerten bei großen Volumina für die vier Stoffe, so ergibt sich im Mittel nahe 0,50. a nimmt also mit wachsender Dichte bis auf die Hälfte seines Wertes bei großer Verdünnung ab, um dann wieder zu steigen.²⁾

Alle vier Substanzen gehorchen untereinander (namentlich gut Kohlensäure und Isopentan) dem Gesetz der korrespondierenden Zustände. Es ist daher zu erwarten, daß das Volumen, für das a ein Minimum hat, zum kritischen Volumen in konstantem Verhältnis steht. Dies ist in der Tat angenähert der Fall. Die kritischen Volumina der vier Substanzen sind in der oben benutzten Reihenfolge 3,801; 0,00426; ca. 0,00569 und 4,266. Nimmt man als Volumina, für die a seinen kleinsten Wert hat, 3,0; 0,00316; 0,004166 und 3,2, so ist der Mittelwert derselben nahe das 0,75 fache des kritischen Volumens.³⁾

1) S. Young, Proc. of the Phys. Soc. of London p. 602. 1894—95; übersetzt: Zeitschr. f. phys. Chem. 29. p. 193—241. 1899. Letztere Arbeit ist im folgenden zitiert.

2) Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß a für sehr kleine Volumina wieder bis zu dem Wert bei großen Volumina ansteigt. Es wird vielmehr entweder einem kleineren Grenzwert zustreben, oder ein Maximum erreichen und dann wieder sinken. Einen Anhaltspunkt geben die Messungen von Amagat an Äthyläther, sowie an Gasen bei hohen Drucken.

3) Vgl. auch Dissertation p. 44.

Daß ein ähnlich wie durch (1) definiertes α starke Funktion des Volumens ist, wurde schon mehrfach bemerkt.¹⁾ Dabei wurde jedoch stets der Druck als lineare Funktion der Temperatur angenommen und daher α unabhängig von der Temperatur gesetzt.

II. Abhängigkeit von α von der Temperatur und thermodynamische Berechnung der spezifischen Wärme c_v .

Die Veränderung von α mit der Temperatur ist nach (6) durch den zweiten Differentialquotienten des Druckes nach der Temperatur gegeben.

Aus allen zuverlässigeren Beobachtungen an normalen Stoffen geht hervor, daß für große Volumina $\partial p / \partial T$ mit wachsender Temperatur abnimmt.²⁾ Diese Verhältnisse ändern sich jedoch in der Nähe des kritischen Volumens.

Einen Überblick über die Veränderung von $\partial p / \partial T$ mit der Temperatur ergeben die Zusammenstellungen von Amagat über $\partial p / \partial T$ für Kohlensäure und Äthylen p. 131 der zitierten Arbeit.

Es zeigt sich zunächst, daß bei großen Volumina $\partial p / \partial T$ mit steigender Temperatur abnimmt, also $\partial^2 p / \partial T^2$ negativ ist. Das kleinste Volumen, bis zu dem dies deutlich der Fall ist, liegt in der Nähe des kritischen und beträgt 0,00578 bei Kohlensäure und 0,008333 bei Äthylen. In der Nähe dieses Volumens ist $\partial^2 p / \partial T^2$ Null, unterhalb desselben positiv; doch erreicht der Wert nur ein Maximum. Denn bei den kleinsten Volumina 0,00200 und 0,00187 bei Kohlensäure, 0,00300 und 0,00286 bei Äthylen sind Änderungen von $\partial p / \partial T$ mit der Temperatur in bestimmtem Sinn nicht zu konstatieren.

Bei Temperaturen viel höher als die kritische (100 bis

1) Vgl. z. B. Rose-Innes, Phil. Mag. 44. p. 76. 1897.

2) Hierauf dürfte auch einer der Vorzüge der Clausiusschen Gleichung

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v + \beta)^2}$$

als Interpolationsgleichung bestehen, daß sie für $\partial^2 p / \partial T^2$ einen negativen Wert ergibt, während diese Größe nach der Gleichung von van der Waals Null ist. Auch ergibt die Clausiussche Gleichung für

$$\alpha = \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) v^2$$

mit größer werdender Dichte abnehmende Werte. Sie kann jedoch keinesfalls mehr in der Nähe des kritischen Volumens Gültigkeit haben, da α in Wirklichkeit nur bis zu einem Minimum abnimmt und sich das Vorzeichen von $\partial^2 p / \partial T^2$ umkehrt. Beides ergibt sich nicht aus der Clausiusschen Gleichung.

240° C.) scheint dagegen $\partial^2 p / \partial T^2$ bis zu kleineren Volumina negativ zu sein. Doch ist es schwer zu entscheiden, wie weit hier Beobachtungsfehler in Frage kommen.

Im ganzen könnten nämlich unsere Schlüsse sehr unsicher sein, da $\partial^2 p / \partial T^2$ nur auf Grund äußerst genauer Versuche festgestellt werden kann, und da diese Größe nach den Beobachtungen von Amagat im einzelnen tatsächlich sehr großen Schwankungen unterliegt.

Daß aber die Tabellen von Amagat im ganzen das richtige Bild geben, geht daraus hervor, daß sich derselbe Gang von $\partial^2 p / \partial T^2$ aus den Resultaten von Young über Isopentan ergibt, und zwar hier mit großer Regelmäßigkeit und Sicherheit. Auf diesen Gang hat auch Hr. Young selbst aufmerksam gemacht. Einen Überblick gibt die Tabelle der $\partial p / \partial T$ -Werte p. 229—231 der zitierten Arbeit.

Die Resultate von Young lassen sich nun zur Prüfung der thermodynamischen Beziehung (5) verwenden, da die kalorimetrischen Bestimmungen von Hrn. Dieterici über c_p vorliegen. Allerdings wird man bei der Unsicherheit der Isothermenmethode einerseits und der kalorimetrischen Bestimmungen in der Nähe des kritischen Punktes andererseits keine ganz quantitative Übereinstimmung erwarten können.

Um den Vergleich mit den Daten von Hrn. Dieterici durchzuführen, wurde auf die Zusammenstellung der p -Werte bei Young p. 226—227 zurückgegangen und $\partial^2 p / \partial T^2$ durch Differenzenbildung mit Benutzung von möglichst gleichmäßigen Temperaturintervallen bestimmt.

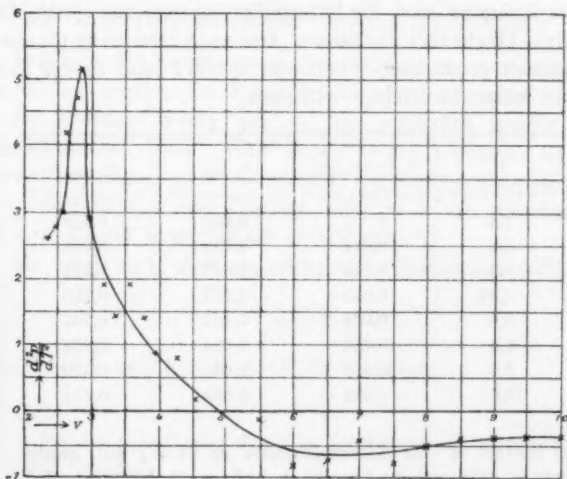
Die Berechnung wurde nur vom Volumen 2,4 bis 10 cm durchgeföhrt, da für größere Volumina die Bestimmung von $\partial^2 p / \partial T^2$ sehr unsicher wird.¹⁾ Auch läßt sich für größere Volumina der Vergleich mit den kalorimetrischen Daten nicht mehr durchführen, da sich die Bestimmungen von Hrn. Dieterici auf die Sättigungskurve beziehen und die Temperaturdifferenzen gegenüber unseren Werten, die sich auf eine 0 bis 10° über der kritischen gelegene Isotherme beziehen, zu groß würden.

1) Für große Volumina läßt sich $\partial^2 p / \partial T^2$ aus der im folgenden aufgestellten Beziehung (8) schätzen, ferner auch aus dem Temperaturverlauf der mit A bezeichneten Größe meiner Arbeit: Beitrag zur Prüfung einer Zustandsgleichung schwach komprimierter Gase (Ann. d. Phys. 6. p. 549. 1901).

In der folgenden Tabelle sind die Volumina, die angewandten Temperaturdifferenzen und die hieraus interpolierten Werte von $\partial^2 p / \partial T^2$ zusammengestellt. Größere Unsicherheit haben die Werte bei 3,2 und 3,0 ccm. Bei anders gewählten Temperaturdifferenzen fallen dieselben erheblich verschieden aus.

v	Temperatur in ° C.	$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$	v	Temperatur in ° C.	$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$
10	220—200—180	-0,365	4,6	210—200—190	+0,20
9,5	" " "	-0,375	4,3	" " "	+0,80
9,0	" " "	-0,400	4,0	" " "	0,90
8,5	" " "	-0,400	3,8	" " "	1,40
8,0	" " "	-0,475	3,6	" " "	1,90
7,5	210—200—190	-0,80	3,4	220—210, 200—190	1,45
7,0	" " "	-0,40	3,2	" " "	1,90
6,5	" " "	-0,70	3,0	185—195—205	2,90
6,0	" " "	-0,80	2,9	185—190—195	5,20
5,5	" " "	-0,10	2,8	180—190—200	4,70
5,0	" " "	-0,10	2,7	" " "	4,10
			2,6	" " "	3,00
			2,5	170—185—200	2,76
			2,4	170—180—190	2,60

Die Werte von $\partial^2 p / \partial T^2$, die eine genügend kontinuierliche Reihe bilden, sind in der folgenden Figur zu einer Kurve vereinigt, in der v die Abszissenachse bildet.



Zur Integration der Gleichung (5) wurde für $v = 2,4$ bis 5 ccm die Temperatur konstant zu 463° , von 5 bis 10 ccm zu 473° abs. angenommen. (Die kritische Temperatur beträgt $460,8^{\circ}$ abs.) Die Integration wurde graphisch vorgenommen. Die Kurve der Figur wurde durch Parallelen zur Ordinate bei 2,4; 2,6; 3,0; 3,5; 4,26; 5,0; 6,5; 8,0; 10,0 ccm in Stücke zerlegt und der Inhalt der Teilflächen mittels Polarplanimeters bestimmt. Sämtliche Messungen mit dem Polarplanimeter wurden mehrfach ausgeführt.

Da man

$$c_v - c_{v_1} = T \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} dv$$

in Millimeter Quecksilber \times Kubikzentimeter erhält, so ist mit $3,191 \cdot 10^{-5}$ zu multiplizieren, um die Differenz der spezifischen Wärmen für die einzelnen Punkte in Grammkalorien zu erhalten.¹⁾

Die folgende Zusammenstellung enthält das berechnete c_v erstens, wenn der Wert dieser Größe für $v = 2,4$ ccm gleich Null gesetzt wird, zweitens wenn derselbe für dieses Volumen in Übereinstimmung mit Hrn. Dieterici gewählt wird. In der letzten Kolumne sind die (interpolierten) experimentellen Daten von Hrn. Dieterici enthalten. Die nach Gleichung (6) aus den Isothermen erhaltenen Werte von $\partial a / \partial T$ sind in der Tabelle p. 1018 unter beobachtet enthalten.

v	$c_v - c_{v=2,4}$	c_v ber.	c_v beob.
2,4	0	0,598	0,598
3,0	0,034	0,632	0,662
3,5	0,049	0,647	0,691
4,26	0,059	0,657	0,710
5,0	0,064	0,662	0,701
6,5	0,056	0,654	0,676
8,0	0,043	0,641	0,659
10,0	0,032	0,630	0,634

1) Hierbei ist die Literatmosphäre zu 24,25 g-Kal. gesetzt. Vgl. W. Nernst, Theoretische Chemie, 4. Aufl., p. 13. Stuttgart 1903.

Es ergibt sich also zwischen $v = 2,4$ und 10 ccm sowohl nach der Isothermen- wie nach der kalorimetrischen Methode ein Maximum für c_v .

Die Größe des Maximums ist beträchtlich verschieden. Es kann dies sowohl in Fehlern der Isothermenbestimmungen wie in der kalorimetrischen Methode begründet sein, da letztere die spezifische Wärme in der Nähe des kritischen Punktes keinesfalls genauer als auf 6—7 Proz. zu bestimmen gestattet.

Bemerkenswert ist, daß für $v = 10$ ccm Berechnung und Beobachtung wieder sehr gut miteinander übereinstimmen, was für die Isothermenmethode spricht, da bei ihr die Unsicherheiten in der Nähe des kritischen Volumens fortfallen.

Übrigens kann eine Differenz zwischen Berechnung und Beobachtung auch daher rühren, daß sich die spezifischen Wärmen nach Hrn. Dieterici auf die Temperaturen der Sättigungskurve, die hier erhaltenen auf konstante Temperatur etwas über der kritischen beziehen. Doch sind die Temperaturdifferenzen für die benutzten Volumina nicht zu groß.

Die Übereinstimmung in der Größenordnung kann jedenfalls als schöne Bestätigung für die Zuverlässigkeit der Youngschen Messungen angesehen werden.

III. Empirische Beziehung zwischen a und $\partial a / \partial T$.

Wie aus der zweiten und dritten Kolumne der folgenden Tabelle hervorgeht, ist $\partial a / \partial T$ beob. am stärksten negativ für die größten Werte von a , am stärksten positiv nahe beim Minimum von a . Man kann hieraus schließen, daß bei höherer Temperatur als der kritischen a in dem betrachteten Gebiet immer unabhängiger vom Volumen wird, d. h. die Annahme von van der Waals immer besser erfüllt wird.¹⁾

Es zeigt sich, daß angenähert die Beziehung erfüllt ist:

$$(8) \quad a + k \frac{\partial a}{\partial T} = \text{Konst.},$$

worin k 48,7 und Konst. $3286 \cdot 10^3$ beträgt.

1) Bei den Gasen zeigt sich a in der Tat bis zu kleinen Volumina viel besser konstant.

v	$a \cdot 10^3$ beob.	$\frac{\partial a}{\partial T}$ beob.	$a \cdot 10^3$ ber.	$\frac{\partial a}{\partial T}$ ber.
2,4	3160	4500	3193	1910
2,5	3042	8400	3046	4930
2,6	2893	9390	2921	7490
2,8	2711	17050	2729	11700
3,0	2582	16900	2611	18860
3,2	2646	10170	2569	14730
3,6	2518	9185	2647	13120
4,0	2752	6810	2805	9880
5	3170	120	3223	1294
6	3533	- 7660	3534	- 5090
7	3772	-13920	3765	-10060
8	3950	-14400	3942	-13470
9	4077	-15310	4081	-16320
10	4128	-17300	4192	-18600

Bedeutend genauer würde diese Beziehung gelten, wenn das Maximum von $\partial a / \partial T$ genau auf das Minimum von a als Funktion des Volumens fallen würde. Dies ist jedenfalls möglich, da durch Unsicherheiten des Experimentes oder der Berechnung die beiden betrachteten Punkte etwas gegeneinander verschoben sein können. Wir entfernen uns daher von den Beobachtungen jedenfalls wenig, wenn wir annehmen, daß die Gleichung (8) in dem betrachteten Gebiete genau erfüllt ist. Legen wir dieselbe zugrunde, so erhalten wir, wenn die beiden Konstanten unabhängig von der Temperatur gesetzt werden, als allgemeinstes Integral der Gleichung (8):

$$(9) \quad a = f(v) e^{-\frac{T}{k}} + \text{Konst.},$$

wo $f(v)$ als Volumfunktion so zu bestimmen ist, daß den Beobachtungen genügt wird. Unter der Annahme, daß die a -Werte, gegen $1/v$ aufgetragen, auf einer Hyperbel liegen, deren Scheitelpunkt der Minimumwert von a bildet, bestimmte ich $f(v)$ zu:

$$(10) \quad f(v) = 5,544 \cdot 10^{10} \sqrt{1 - \frac{6,164}{v} + \frac{9,943}{v^2}} - 2,356 \cdot 10^{10},$$

wo das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen ist.

Aus (9) und (10) ergeben sich die in der Tabelle unter berechnet stehenden Werte von a und $\partial a / \partial T$. In diesen Zahlen ist also die Gültigkeit der Beziehung (8) enthalten. Es ist wohl von Interesse, daß man die noch fast gar nicht untersuchten Größen a und $\partial a / \partial T$ wenigstens angenähert durch eine Formel verknüpfen kann.

Für U ergibt sich durch Integration der Ausdruck:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= - \frac{3,286 \cdot 10^6}{v} \\ &+ \frac{2,356 \cdot 10^{10} e^{-\frac{T}{k}}}{v} \left[1 - 2,353 \left(\frac{1 - 0,3100 v}{2 v} \sqrt{1 - \frac{6,164}{v} + \frac{9,943}{v^2}} \right) \right. \\ &+ 0,007080 \ln \left(\frac{3,153}{v} - 0,9775 + \sqrt{1 - \frac{6,164}{v} + \frac{9,943}{v^2}} \right) \Big] \\ &+ \int_0^T c_\infty dT + C. \end{aligned} \right.$$

Es lassen sich jedoch auch einfachere Ausdrücke für $f(v)$ finden, die ungefähr dasselbe leisten.¹⁾

Differenziert man (7) bez. (11) nach der Temperatur, so muß man die spezifische Wärme c_v für ein beliebiges Volumen erhalten, falls c_∞ bekannt ist. Über die spezifischen Wärmen verdünnter Dämpfe namentlich in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur wären Beobachtungen sehr zu wünschen.

Die Kenntnis von U machte ich zum Ausgangspunkt beim Versuch, eine Zustandsgleichung zu begründen. Ich möchte jedoch hierauf nicht eingehen, sondern ich wollte nur diejenigen kalorimetrischen Eigenschaften zusammenstellen, die sich einerseits aus dem vorliegenden Isothermenmaterial, andererseits aus den Versuchen von Hrn. Dieterici ergeben, ohne gas-theoretische Schlüsse in dieser Arbeit ziehen zu wollen.

1) So kann man setzen:

$$f(v) = 2,996 \cdot 10^{10} \left(1 - \frac{5,1}{v} + \frac{210}{v^6} \right)$$

und hieraus

$$U = - \frac{3,286 \cdot 10^6}{v} - \frac{2,996 \cdot 10^{10}}{v} \left[1 - \frac{2,55}{v} + \frac{30}{v^6} \right] e^{-\frac{T}{48,7}} + \int_0^T c_\infty dt + C$$

ein Ausdruck, der jedoch für kleinere Volumina als die hier betrachteten bald zu große Werte annehmen würde. Vgl. ferner eine Darstellung von U durch einen anderen Exponentialausdruck Diss. p. 99 u. 107, wo für jeden Körper nur drei unabhängige Konstanten eingeführt sind.

(Eingegangen 22. Oktober 1905.)

7. *Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung;*
von H. Greinacher.

Zweite Mitteilung.

1. Neulich ist über eine Erscheinung berichtet worden, die unter besonderen Umständen an Gaszellen beobachtet werden kann.¹⁾ Der Grundversuch war folgender: Es wurden zwei schmale Metallplättchen, wovon das eine mit Radiotellur belegt war, in eine Glasröhre eingeschmolzen, so daß sie sich in ca. 2 mm Distanz gegenüberstanden. In eine Erweiterung des Gefäßes wurde etwas P_2O_5 gebracht. Nachdem darauf die Röhre abgeschmolzen und sodann $\frac{1}{3}$ bis $1\frac{1}{3}$ Stunden auf ca. $140-170^\circ$ erhitzt worden war, ließ sich zunächst in Übereinstimmung mit früheren Versuchen²⁾ nachweisen, daß die elektromotorische Kraft der Gaszelle durch die Entfernung der Feuchtigkeit verschwunden war. Wenn man nun an die Metallstreifen z. B. 110 Volt anlegte, so daß während einiger Zeit ein polarisierender Strom durch die Zelle ging, zeigten die Metalle nachher ganz erhebliche Potentialdifferenzen, bis zu 60 Volt. Eine Reihe von Versuchen ließ erkennen, daß diese Erscheinung ihre Ursache sehr wahrscheinlich in einer äußerst dünnen Schicht von P_2O_5 hatte, die durch das Erhitzen an die Metalle hin sublimiert war.

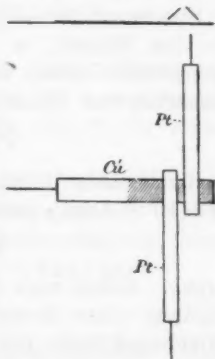
Um dies nachzuweisen, war insbesondere folgender Versuch unternommen worden: In eine Glasröhre wurden in der früheren Anordnung die Elektroden eingeschmolzen. Die Erweiterung aber, die zur Aufnahme des P_2O_5 dienen sollte, wurde erst am Ende eines kurzen, engeren Verbindungsrohres angeschmolzen. Nach Einbringen des P_2O_5 und Abschmelzen erhitzte man die Röhre zunächst in der früheren Weise, worauf

1) H. Greinacher u. K. Herrmann, Ann. d. Phys. 17. p. 922. 1905.

2) H. Greinacher, Ann. d. Phys. 16. p. 708. 1905.

sich nach Abkühlung die „Aufladeerscheinung“ nachweisen ließ. Nun wurde der die Zelle enthaltende Glasteil allein erhitzt, um das P_2O_5 wieder von den Metallen wegzusublimieren. Damit sollte dann auch die Möglichkeit einer Aufladung verschwinden. Die seinerzeit in dieser Richtung ausgeführten Versuche hatten jedoch keine entscheidenden Resultate geliefert, und schien es daher von Interesse, die Versuche nochmals zu wiederholen.

2. Die Ausführung war folgende: In eine Glasröhre wurden die Elektroden, ein mit Radiotellur belegter Kupferstreifen (Cu) und zwei Platinbleche eingeschmolzen. Die Anordnung derselben wurde wie bei den früher beschriebenen „Sondenversuchen“ gewählt (vgl. Figur). Man hatte so die Möglichkeit, die beiden Platinstreifen als Elektroden zu benutzen, während das Radiotellurpräparat nur zur Ionisierung des zwischenbefindlichen Gases diente. Diese Anordnung sollte insbesondere ermöglichen, festzustellen, ob der Versuch eventuell nur mit Edelmetallen gelingt (l. c.). Der die Elektroden enthaltende Teil der Glasröhre war durch ein ca. 10 cm langes, engeres Röhrenstück von der mit P_2O_5 beschickten Erweiterung getrennt. Das Erhitzen der Röhre geschah in einem chemischen Verbrennungssofen. Nachdem man eventuell wiederholt erhitzt hatte, wurde festgestellt, in welchem Maße die Platinbleche sich aufladen ließen. Um sodann die hinsublimierte P_2O_5 -Schicht wieder wegzubringen, wurde der die Zelle enthaltende Teil der Glasröhre im Verbrennungssofen allein erhitzt, indem man das mit P_2O_5 gefüllte Ende herausragen ließ. In welcher Weise die Aufladung sich danach verändert zeigte, ist aus den unten angeführten Zahlen zu ersehen.



Bemerkt sei, daß, wie früher, die Potentialdifferenzen und Stromstärken mit einem Dolezalekschen Elektrometer nach seinerzeit beschriebenen Nullmethoden (l. c.) gemessen wurden. Die Empfindlichkeit des Instrumentes (Siliciumbronzedraht-aufhängung) war bei einer Ladebatterie von 200 Wasser-

elementen und einem Skalenabstand von 6,5 m ca. 360 mm pro Volt. Zum „Aufladen“ wurde eine Zink-Kohle-Salmiak-Batterie von 40 Elementen benutzt, die zuerst 50 Volt und später noch 40 Volt aufwies.

Eine der ausgeführten Versuchsreihen möge hier etwas ausführlicher folgen. Es ergab sich nach Abschmelzen der Röhre

$$Pt_1/Pt_2 = - 0,03 \text{ Volt.}$$

Nachdem die Röhre 1 Stunde auf ca. 190° erhitzt und diese Operation bei etwas höherer Temperatur wiederholt worden war (220—240°), wurde versucht, die Zelle (Pt_1 , Pt_2) aufzuladen. Es zeigte sich, daß die Spannung nach 24 Stunden bloß -0,60 Volt betrug. Nun wurde die Glasröhre nochmals 1 Stunde auf 230—250° erhitzt, nachdem einige Körnchen P_2O_5 in den Glasteil, in welchen die Metallstreifen hineinragten, geschüttelt worden waren. Nach Abkühlen zeigten die Streifen zunächst eine Spannung

$$Pt_1/Pt_2 = + 0,10 \text{ Volt.}$$

Sodann wurde 16 Stunden aufgeladen (Pt_2 : Anode, Stromstärke $0,8 \cdot 10^{-10}$ Amp.), worauf sich nun eine Spannung von

$$Pt_1/Pt_2 = - 7,1 \text{ Volt}$$

ergab. Selbst nach 35 Min. betrug sie noch -4,9 Volt. Die Bildung einer dünnen P_2O_5 -Schicht war offenbar durch das Hinüberschütteln von etwas P_2O_5 begünstigt worden, worauf dann eine beträchtliche Aufladung entstehen konnte. Daß diese hier wie im folgenden nicht dieselbe Größe wie bei den früher mitgeteilten Versuchen erreichen konnte, liegt zum Teil wohl an der geringeren angelegten Potentialdifferenz (40 bis 50 Volt, statt wie früher 110 Volt).

Nun folgte das Abdestillieren des P_2O_5 von den Metallen während ca. 1 Stunde, wobei im Verbrennungsofen 330—350° gemessen wurden. Nach Abkühlen war

$$Pt_1/Pt_2 = + 0,04 \text{ Volt.}$$

Nach $16\frac{1}{2}$ stündigem Aufladen (Pt_2 : Anode, $0,5 \cdot 10^{-10}$ Amp.) betrug die Spannung

$$Pt_1/Pt_2 = - 0,52 \text{ Volt.}$$

Die Aufladeerscheinung war also merklich verschwunden. Dasselbe ergab sich auch, als man die Streifen (Pt_1 , Cu') aufzuladen versuchte. Nach 24 Stunden (Cu': Anode, $0,8 \cdot 10^{-10}$ Amp.) war

$$Pt_1/Cu' = - 0,52 \text{ Volt.}$$

Nachdem die ganze Röhre von neuem erhitzt worden war (1 Stunde 220—240°), konnten auch wieder beträchtliche Aufladespannungen erzielt werden. Es ergab sich nach $17\frac{1}{4}$ Stunden (Pt_2 : Anode, $0,6 \cdot 10^{-10}$ Amp.) eine Endspannung von

$$Pt_1/Pt_2 = - 8,9 \text{ Volt.}$$

Auch die Kombination (Cu', Pt_2) ließ sich wieder aufladen; nach $16\frac{1}{2}$ Stunden ($0,7 \cdot 10^{-10}$ Amp.) bis auf

$$Pt_2/Cu' = - 9,4 \text{ Volt.}$$

Daß die Aufladung an beiden Metallen in gleichem Grade erfolgt war, wurde mit Hilfe der Elektrode Pt_1 nachgewiesen. Es ergab sich, daß die Spannungen Pt_2/Pt_1 und Pt_1/Cu' ziemlich gleich waren.

In der früheren Weise wurde nun das P_2O_5 von den Metallen wieder entfernt (Temperatur im Verbrennungsofen 340—350°). Damit verschwand dann ebenfalls die Aufladeerscheinung. Denn Pt_1/Pt_2 zeigte nach 16 Stunden ($0,4 \cdot 10^{-10}$ Amp.) nur

$$Pt_1/Pt_2 = 0,50 \text{ Volt.}$$

Ebenso ließ sich auch (Cu', Pt_2) nicht mehr aufladen. Hier betrug die Spannung nach 47 Stunden (Cu': Anode) kaum

$$Pt_2/Cu' = - 0,16 \text{ Volt.}$$

Während der ganzen Versuchsreihe hatten die Platinstreifen ihr Aussehen nicht verändert, insbesondere konnte von hinsublimiertem P_2O_5 nichts bemerkt werden; der Cu'-Streifen wurde jedoch durch das Erhitzen schwarz und schien außerdem nach dem Gesamterhitzen der Röhre mit feinen Bläschen überzogen. Der Versuch gelang jedoch sowohl mit Pt als mit Cu', so daß die früheren Versuche dieser Art wahrscheinlich nicht infolge Verwendung oxydabler Metalle ohne entscheidende Ergebnisse geblieben sind. Auch scheint wohl dafür eine etwaige Verschiedenheit des käuflichen P_2O_5 (das

früher benutzte P_2O_5 war von C. A. F. Kahlbaum, das neuere von Dr. Bender und Dr. Hobein bezogen) von nennenswerter Bedeutung nicht zu sein. Vielmehr war bei den neueren Versuchen das Verbindungsstück länger wie früher gewählt worden. Die Metalle waren dann vor dem Hinsublimieren des P_2O_5 schon gut getrocknet, weshalb das Wegsublimieren der Schicht besser gelang.

Nach den mitgeteilten Versuchen scheint es nun unzweifelhaft, daß die Aufladung an das Vorhandensein einer dünnen P_2O_5 -Schicht gebunden ist, und daß also eine vollkommene Analogie besteht zwischen dieser und der an dünnen Schellackschichten beobachteten Erscheinung (l. c.).

3. Es ist bereits in der letzten Arbeit der Vermutung Ausdruck gegeben worden, daß die Aufladeerscheinung eine Folge des durch die halbleitende Schicht gehenden Stromes sei. Man könnte aber auch versuchen, die Versuche dadurch zu erklären, daß man die dünnen P_2O_5 -Schichten als Dielektrika zweier Kondensatoren mit den Metallen bez. der ionisierten Luft als Belegungen auffaßt. Wird an die Metallstreifen eine Potentialdifferenz angelegt, so laden sich die Kondensatoren auf, jedoch nur langsam, da die Leitfähigkeit der Luft eine begrenzte ist. Aus dem gleichen Grunde erfolgt nach Kurzschließen der Zelle die Entladung nur allmählich. Es macht daher der Ladungs- bez. Entladungsstrom den Eindruck eines Leitungsstromes. Die in den Kondensatoren aufgespeicherte Elektrizitätsmenge kann beträchtlich sein, da die Kapazitäten infolge der geringen Dicke der Isolatorschichten erheblich sein können. Es wäre auch zu verstehen, daß, wie seinerzeit bemerkt wurde (l. c.), die Stromstärke vor und nach dem Erhitzen mit P_2O_5 nicht merklich verschieden ist. Die Stromstärke sowohl vorher als nachher ist durch die Elektrizitätsmenge, welche die ionisierte Luft durchfließt, gegeben. Da nun an den der Luft zugewendeten Seiten der P_2O_5 -Schichten zu Beginn der Aufladung diejenige Potentialdifferenz wirkt, welche an die Metalle angelegt wird, so ist der Elektrizitäts-transport durch die ionisierte Luft ebenso groß, wie ohne Isolatorschicht.

Man kann also mit Hilfe der Kondensatorvorstellung die beobachteten Erscheinungen zu erklären versuchen, und zwingen

die Versuchsergebnisse zunächst nicht zur Annahme, daß die Aufladung die Folge eines durch die schlecht leitende Schicht gehenden Stromes ist. Die im folgenden mitgeteilten Versuche sind nun dazu ausgeführt, zur Entscheidung dieser Frage beizutragen.

4. Da nach der Kondensatoranschauung die Aufladung deshalb nur allmählich verschwindet, weil die Leitfähigkeit der Luft zwischen den Metallen eine beschränkte ist, so mußte man eine augenblickliche Entladung erwarten, falls man die beiden Seiten der Schellackschicht *metallisch* miteinander verband. Der Versuch wurde so ausgeführt, daß man zunächst auf einem Stück Weißblech alkoholische Schellacklösung verdunsten ließ. Der dünnen Schellackschicht stellte man nun ein Radiotellurpräparat von $3,6 \text{ cm}^2$ Oberfläche gegenüber, worauf in der früheren Weise aufgeladen wurde (Cu' : Anode; $0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Amp.}$). Nachdem die Endspannung von 11,5 Volt erreicht war, wurde sodann versucht, den Kondensator dadurch zu entladen, daß man das mit Schellack belegte Blech erdete und die Schellackschicht mit geerdetem Stanniol abwischte. Es ergab sich, daß die Spannung dadurch nicht verschwand, daß vielmehr die Aufladespannung in merklich derselben Weise abnimmt, ob man mit geerdetem Stanniol abwischt oder die Zelle nach dem Aufladen sich selbst überläßt.

Danach schien es möglich zu sein, auch eine Aufladung zu erzielen, wenn man direkt an die dünne Schicht zwei Belegungen nach Art eines dünnschichtigen Kondensators anlegte. Ein Stück Weißblech wurde auf die angegebene Weise mit einer Schellackschicht überzogen. Durch Wägung wurde festgestellt, daß die mittlere Dicke der Schicht, wenn man das spezifische Gewicht des gegossenen Schellacks, das zu 1,14 bestimmt wurde, nimmt, 0,0060 cm war. Auf den Schellacküberzug wurde nun ein Stanniolstreifen mit einem heißen Blech aufgebügelt. Wurde jetzt an die beiden Belegungen die Spannungsbatterie angelegt, so zeigte sich zunächst, daß der Aufladestrom so stark war, daß er elektrometrisch bei Verwendung von 1 Mikrof. nicht mehr zu messen war ($> 10^{-7} \text{ Amp.}$). Während vor dem Aufladen die Spannung Sn/Sn^* ($\text{Sn}^* = \text{Weißblech}$) beinahe Null war, ergab sich nach 19 stündigem Stromdurchgang $\text{Sn}/\text{Sn}^* = -0,88 \text{ Volt}$. Wenn hier diese Spannung

einer Aufladung im früheren Sinne zugeschrieben werden durfte, so war sie jedenfalls sehr klein. Die Endspannung wuchs zwar mit der Zeit stetig. Zwei Tage nach Herstellung des Kondensators war sie 1,46 Volt, nach drei Tagen 1,74, nach vier Tagen 1,90, bis sie nach sieben auf den von da an konstant bleibenden Wert 2,1 Volt gestiegen war. Während sich zwar die Aufladespannung nur als gering herausstellte, war die aus der Schellackzelle zu entnehmende Elektrizitätsmenge sehr bedeutend; denn beim Anlegen an ein Galvanometer ergab sich ein Entladungsstrom von $4,8 \cdot 10^{-8}$ Amp.

Da nun aber die Aufladespannung die Größenordnung von Polarisationsspannungen in galvanischen Elementen nicht überschritt, so konnte die Erscheinung möglicherweise einer Polarisation an den Belegungen zugeschrieben werden. Um darüber etwas zu erfahren, wurde der Versuch unternommen, eine Zelle mit Quecksilberbelegungen zunächst aufzuladen, nach Messung der Aufladespannung die Belegungen auszuwechseln und wieder zu messen. Die zu diesem Versuch nötige dünne Schellackschicht wurde auf folgende Weise hergestellt. Auf einem Stanniolblatt wurde Schellacklösung verdunstet, worauf die unbelegte Stanniolseite bis auf eine kleine Kreisfläche von 1,1 cm Durchmesser mit Paraffin belegt wurde. Indem man das noch freibleibende Stanniol mit Salpetersäure auflöste, erhielt man eine dünne Schellackschicht, deren mittlere Dicke durch Wägung zu 0,003 cm festgestellt wurde. Die Belegungen wurden nun dadurch gebildet, daß man Quecksilber in die Paraffinöffnung goß und das ganze wiederum auf Quecksilber legte, das die Ausbohrung eines Paraffinklötzchens bis oben ausfüllte. An die Belegungen wurde dann die Batterie zum Aufladen angelegt.

Nachdem der Strom ($0,6 \cdot 10^{-8}$ Amp.) 19 Stunden durchgegangen war, wurde die Abnahme der Aufladung verfolgt. Es zeigte sich, daß ihr Verlauf sich nicht änderte, falls man die Quecksilberbelegungen erneuerte. Die im folgenden mitgeteilte Messungsreihe möge dies zeigen. Die mit * bezeichneten Messungen wurden nach Erneuerung der Belegungen ausgeführt. Die Zeichen + und - beziehen sich auf das Vorzeichen der am Elektrometer gemessenen Seite.

Zeit	Spannung
0 Min.	-5,0 Volt
1,3 "	+4,2 "
2,5 "	+3,2 "
5,3 "	-2,1 "
7,1 "	-1,7 "
9,8 "	-1,4 "
11,8 "	+1,2 "

Um das Quecksilber beim Erneuern vollständig zu entfernen, wurden etwa noch anhaftende Tröpfchen mit einem Pinsel entfernt. Eine Beeinflussung durch eventuell dadurch entstandene Reibungselektrizität war nicht zu befürchten, da, wie festgestellt wurde, eine Schellackschicht, die keine Spannung zeigte, auch nach Abwischen mit dem Pinsel eine solche nicht aufwies. Um von der Berührung des Quecksilbers mit dem Paraffin unabhängig zu sein, wurde bei einigen Versuchen als obere Belegung ein Messingzylinderchen aufgesetzt, an dessen amalgamierter Grundfläche von 0,9 cm Durchmesser ein Quecksilbertropfen hing. Dadurch wurde allerdings eine kleine Potentialdifferenz eingeführt, da bereits eine geringe Beimengung von Messing durch Amalgamierung eine für sogenannte Kontaktpotentialdifferenzen erhebliche elektromotorische Kraft hervorrufen kann.¹⁾ Aber sowohl hier als bei den übrigen Versuchen, bei welchen die Belegungen aus verschiedenem Metall waren, konnte bei den verhältnismäßig hohen Aufladespannungen von etwaigen elektromotorischen Kräften abgesehen werden. Denn, wie der oben mitgeteilte Versuch zeigt, sind die bei Verwendung von Quecksilberbelegungen erreichten Spannungen beträchtlich. Bei einigen Versuchen wurden bis 10 Volt gemessen. Werte von derselben Größe lieferten auch Zellen, die aus mit Schellack belegtem Weißblech und einem Tropfen Quecksilber, der durch einen Kupferdrahttring zusammengehalten wurde, gebildet waren.

Nur die mit Stanniolbelegungen gebildeten Zellen hatten keine über Polarisationsspannungen reichende Potentialdifferenzen gezeigt. Nun war es kaum anzunehmen, daß der Kontakt des Stanniols mit der Schellackfläche schlechter war, wie bei Verwendung von Quecksilber. Vielmehr stellte sich heraus,

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 56. p. 644. 1895.

daß das unterschiedliche Verhalten mit der relativ großen Leitfähigkeit des unter dem Stanniol befindlichen Schellacks zusammenhing. Da das Lösungsmittel (Alkohol + Wasser) beim Anlegen der Stanniolbelegung (ca. 24 Std. nach Aufbringen der Lösung auf das Blech) noch nicht genügend verdunstet war, besaß die Schellackschicht noch zu große Leitfähigkeit, als daß eine größere elektrische Spannung sich darin hätte aufrecht erhalten können. Da nun durch Anbringen des Stanniols die weitere Verdunstung fast ganz zurückgehalten wurde, stieg auch die Aufladung nicht über den kleinen Wert 2 Volt. Als aber die Stanniolbelegung für elf Tage weggenommen worden war, ergab sich nach Wiederanlegen die erheblich größere Endspannung von 5,6 Volt. Dabei war auch die Leitfähigkeit bedeutend verringert. Während der Aufladestrom früher elektrometrisch nicht mehr zu messen war, ergab er sich hier (Stanniolfläche $12,1 \text{ cm}^2$) zu $0,9 \cdot 10^{-8} \text{ Amp.}$ Eine Wiederholung des Versuchs führte zu demselben Ergebnis.

Es geht daraus hervor, daß die Aufladung von der Leitfähigkeit der Schicht abhängt. Eine nähere Bestimmung dieser Abhängigkeit ist nicht ausgeführt worden, doch dürfte der zu erwartende Verlauf etwa folgender sein: Bei verhältnismäßig großer Leitfähigkeit wird keine merkliche Aufladung erfolgen, und wird man, wenn nicht galvanische Polarisierung auftritt, nach Durchgang eines Stromes keine Spannung nachweisen können. Nimmt die Leitfähigkeit nun stetig ab, so wird die Aufladung zunächst größer werden. Sie wird aber nach Erreichung eines Maximums wieder abnehmen, da bei unendlich großem Widerstand kein Strom fließt, und in diesem Fall auch keine Aufladung stattfindet. Eine Stanniolzelle, für welche eine dünne *gegossene* Schellackschicht verwendet wurde, zeigte, da kein Strom durchging, in der Tat auch keine Spannung.

Für große Leitfähigkeiten wurde, wie früher (l. c.), die Zunahme der Aufladungsspannung mit der Dauer des Stromes und die Abnahme derselben nach Kurzschließen verfolgt. Es ergaben sich in gleicher Weise Exponentialkurven, deren Verlauf aber im Vergleich mit geringeren Leitfähigkeiten steiler war. Große Leitfähigkeit und geringe Endspannung zeigten sich auch, wenn als Zwischenschicht ein Kollodiumhäutchen und als Belegungen Quecksilber genommen wurden. Die

Stromstärke war selbst bei einer Belegung von nur $0,4 \text{ cm}^2$ für die elektrometrische Messung zu groß und die Endspannung betrug kaum 1,3 Volt. Ließ man hingegen den Spitzenstrom einer Elektrisiermaschine durch das Kollodiumhäutchen gehen, so konnte man auch hier größere Spannungen erhalten; diese nahmen jedoch ziemlich rasch ab.

Es wurde auch folgender Versuch ausgeführt: Zwei Radiotellurpräparate wurden einander in einem Abstand von einigen Millimetern gegenübergestellt und mit den Quadranten des unempfindlich geschalteten Elektrometers verbunden. Dasselbe zeigte dann keinen Ausschlag, auch wenn eine dünne Schellackschicht dazwischen gelegt wurde. Ließ man nun durch letztere kurze Zeit Spitzenstrom durchgehen, so gab das Elektrometer beim Zwischenbringen der Schicht zwischen die Präparate einen Ausschlag, dessen Vorzeichen sich umkehrte, wenn das Schellackblättchen umgekehrt dazwischen gelegt wurde. Der Ausschlag verschwand erst allmählich wieder. Es wurde auch versucht, eine Aufladung zu erzielen, indem man direkt an die beiden Cu'-Streifen, zwischen denen sich die Schellackschicht befand, eine Spannung anlegte. Es ließ sich jedoch keine nennenswerte Aufladung nachweisen.

5. Was nun die Anschauung über den Vorgang der Aufladung betrifft, so sprechen die mitgeteilten Versuche dafür, daß dieselbe eine Wirkung des durch die Schicht fließenden Stromes ist. Ob derselbe elektrolytischer Natur ist, bleibt dabei noch dahingestellt. Da aber jedenfalls der Vorgang an eine gewisse, wenn auch sehr geringe Leitfähigkeit gebunden ist, so besteht mit einer galvanischen Zelle die größere Ähnlichkeit als mit einem Kondensator. Man könnte vielleicht dementsprechend eine Anordnung, welche eine Aufladung zeigt, mit „Halbzelle“ bezeichnen. Die Wirkung einer solchen „Halbzelle“ kann man nun so auffassen, daß die von der einen Elektrode wegfließende Elektrizität zum Teil in der Zwischenschicht angehäuft wird. Man kann aber auch annehmen, daß sämtliche Elektrizität von der einen Elektrode zur anderen gelangt, und durch den Strom nur die anfänglich in der Zwischenschicht überall gleich verteilten Elektrizitäten zum Teil mitgeführt und dadurch getrennt werden. Es würde hier zu weit führen, auf Grund der mitgeteilten Versuche eine ge-

nauere Erklärung des Vorganges versuchen zu wollen, und dürften erst weitere Untersuchungen zur Klärung dieser Frage führen.

Vorliegende Arbeit ist am Physik. Institut der Universität Zürich ausgeführt, und benutze ich die Gelegenheit, Hrn. Prof. Kleiner für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir Platz und Apparate zur Verfügung gestellt hat, meinen wärmsten Dank auszusprechen. Ebenso sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Marckwald für die freundliche Überlassung der Radiotellurpräparate herzlichst zu danken.

Genf, November 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

8. *Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung;*
von Johannes Friedel.

(Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation des Verfassers.)

Einleitung.

Um die optischen Anomalien gewisser Mischkristalle zu erklären, hatte Biot¹⁾ die Annahme gemacht, daß dieselben aus einzelnen, einfach brechenden Lamellen aufgebaut seien und infolge dieser Struktur auf einen schief einfallenden Lichtstrahl in ähnlicher Weise wirken wie ein Glasplattensatz, bei dem die Luftschichten zwischen den Platten sehr dünn sind. Diese Theorie wurde fortgeführt und erweitert von Mitscherlich, Wertheim, Frankenheim u. a. Frankenheim²⁾ nahm an, daß die Lamellen nicht durch eine Luftschicht getrennt seien, sondern daß sie selbst verschiedene Brechbarkeit besitzen. Später ist die Biotsche Theorie allgemein aufgegeben worden, da sie die Gesamtheit der Erscheinungen nicht zu umfassen vermochte; man führte mit Erfolg die optischen Eigenschaften der Mischkristalle auf innere Spannungen zurück, welche beim Kristallisationsprozeß entstehen sollten (Brauns³⁾, Lehmann⁴⁾).

Unabhängig von den Untersuchungen und Theorien der Kristallographen ist die Frage nach den optischen Eigenschaften eines aus zwei Substanzen bestehenden Lamellarkörpers von Hrn. Prof. Wiener aufgegriffen worden.⁵⁾ Auf theoretischem Wege gelangte er zu dem Resultat, daß ein solcher Körper sich wie ein einachsiger Kristall verhalten

1) J. B. Biot, Compt. rend. 12. p. 1121. 1841; Mém. de l'Acad. des sciences 18. p. 541. 1842.

2) L. Frankenheim, Pogg. Ann. 111. p. 31 f. 1860.

3) R. Brauns, Die optischen Anomalien der Kristalle. Leipzig 1891.

4) O. Lehmann, Molekularphysik. Leipzig 1888.

5) O. Wiener, Leipz. Ber. 54. p. 282. 1902; Physik. Zeitschr. 5. p. 332. 1904.

müsse, dessen optische Achse senkrecht zur Schichtung steht, wobei vorauszusetzen ist, daß die Brechungsexponenten der beiden Substanzen verschiedene Werte haben, und die Dicken der einzelnen, unter sich parallelen Lamellen klein gegen die Lichtwellenlänge sind. Ehe man aus der Wienerschen Theorie irgendwelche Folgerungen ziehen will, ist es natürlich wünschenswert, ihre qualitative und quantitative Richtigkeit an einem künstlich hergestellten Körper unter wohl definierten Verhältnissen zu prüfen.

Die lamellare Doppelbrechung ist ein spezieller Fall der durch anisotrope Anordnung isotroper Elemente erzeugten Doppelbrechung. Qualitative Untersuchungen in dieser Richtung sind bereits von Braun ausgeführt. Braun zeigte, daß ein aus Backsteinen aufgebautes Gitter für elektrische Wellen doppelbrechend ist.¹⁾ Mehrfachen Bedenken unterliegen analoge Versuche Brauns²⁾ auf optischem Gebiete.³⁾ Schließlich sind von Braun⁴⁾ Versuche veröffentlicht worden, welche für den Tabaschir qualitativ den Nachweis einer lamellaren Doppelbrechung erbringen.

Schon längere Zeit vor Erscheinen der Braunschen Arbeiten hatte ich mit Untersuchungen zur Prüfung der Wienerschen Theorie begonnen, die aber umfangreicher Vorversuche wegen erst vor kurzem zum Ziele führten. Die Schwierigkeiten lagen in der Art und Weise, wie die Schichtkörper zu gewinnen waren. Am geeignetsten ist die Anwendung der Kathodenzerstäubung, welche gestattet, gleichmäßige Schichten in beliebig kleiner Dicke herzustellen. Die langwierigste Aufgabe meiner Untersuchung bestand nun darin, zwei Substanzen zu finden, deren Brechungsindizes genügend verschieden sind, um der Theorie zufolge einen Körper mit meßbarer Doppelbrechung zu bilden. Da unter den durch Kathodenzerstäubung herstellbaren, durchsichtigen Stoffen, die bisher untersucht sind, keine zwei waren, die dieser Bedingung genügten, so mußten der Untersuchung zunächst zahlreiche Ver-

1) F. Braun, *Physik. Zeitschr.* 5. p. 199. 1904.

2) F. Braun, *Ann. d. Phys.* 16. p. 278. 1905.

3) J. Friedel, *Leipz. Ber.* 57. p. 320. 1905.

4) F. Braun, *Ann. d. Phys.* 16. p. 364. 1905.

suche vorausgehen, um Substanzen mit geeigneten Brechungsexponenten zu gewinnen.

Der zur Kathodenzerstäubung dienende Apparat.

Die Kathodenzerstäubung wurde in bekannter Weise ausgeführt, nur mit der Modifikation, daß ein großer Rezipient von ca. 12 Liter Inhalt verwendet wurde. Dies geschah sowohl aus unten zu erörternden technischen Gründen, wie auch aus der Erwägung, bei Darstellung von Oxydspiegeln stets ein genügendes Quantum Sauerstoff zur Verfügung zu haben, und bei Darstellung von reinen Metallspiegeln die Wirkung der den Gefäßwänden anhaftenden Feuchtigkeit und atmosphärischen Luft möglichst zu vermindern.

Der Rezipient war auf eine 2 cm starke Glasplatte aufgeschliffen. Die Spiegelglasplatte, auf welche die Lamellen niedergeschlagen wurden, lag fest in der Mitte, die Kathoden waren so angebracht, daß man sie durch Drehungen von außen abwechselnd über die Glasplatte bewegen konnte. Außerdem waren noch zwei Glimmerplatten, ebenfalls von außen drehbar, im Rezipienten angebracht, durch welche bestimmte Teile der Glasplatte gegen die Zerstäubungsprodukte abgeschirmt werden konnten. Durch diese Vorrichtung wurde erreicht, daß man in der Mitte der Glasplatte einen Lamellarkörper, an den Seiten jedoch zwei Gebiete erhielt, von denen das eine nur mit Silber, das andere nur mit Kupfer bedeckt war. Mit Hilfe dieses Verfahrens war es möglich, 1. die relativen Dicken des geschichteten Mediums zu berechnen, 2. zu erkennen, daß die einzelnen Substanzen an sich keine Doppelbrechung besaßen.¹⁾

Das Evakuieren geschah zuerst mit einer Kahlbaum-quecksilberpumpe, dann mit einer von Hrn. Prof. Des Coudres freundlichst zur Verfügung gestellten Gerykpumpe, schließlich mit einer Teleskopvakuumpumpe (von Max Kohl, Chemnitz), welche in ca. $\frac{1}{2}$ Stunde eine genügende Verdünnung (ca. 1 bis 0,1 mm) erzeugte. Zur Messung des Druckes diente eine Barometerprobe, teilweise auch ein Mac Leodsches Manometer. In

1) Wenn bisweilen metallische Spiegel Doppelbrechung besitzen, so wird diese jedoch, wie A. Kundt (Wied. Ann. 27. p. 69. 1869) zeigte, durch chemische Umwandlung aufgehoben.

den meisten Fällen genügte es, die Größe des Druckes nach der Farbe und Ausdehnung des Glimmlichtes zu beurteilen.

Als Kathoden dienten hauptsächlich kreisförmige Metallplatten von 0,3—0,5 mm Dicke und 4 cm Durchmesser. Diese wurden an Kupferösen, in welche der Zuführungsdraht an der Einschmelzstelle endete, aufgehängt. Die Aufhängestelle war durch ein übergeschobenes Glasröhrchen vor dem Zerstäuben geschützt. Nach der Vorschrift von Boas¹⁾ waren die Elektroden auf der oberen Seite durch Glimmerplatten abgeblendet. Teilweise verwendete ich auch drahtförmige Kathoden in der Weise, wie sie von Hrn. Gräser²⁾ beschrieben sind.

Bei Anwendung von Platten benutzte ich ein Induktorium von ca. 10 cm maximaler Funkenlänge, die Stromquelle des Primärstroms hatte eine Spannung von 10 bez. 20 Volt. Zur Zerstäubung von drahtförmigen Elektroden diente ein kleineres Induktorium von ca. 3 cm Funkenlänge, bei welchem eine Stromquelle von 8—10 Volt angewendet wurde. Alle Versuche geschahen mit Deprezunterbrecher.

Die Bestandteile des Schichtkörpers.

Nach mannigfachen Versuchen, über die in der Dissertation genauer berichtet ist, benutzte ich als Bestandteile des Schichtkörpers Jodsilber und Kupferjodür. Es wurde auf die Glasplatte abwechselnd Kupfer und Silber zerstäubt und dann der ganze Spiegel jodiert.

Beide Substanzen haben den Vorzug, äußerst gering zu absorbieren, sofern man sorgfältig das Auftreten einer Trübung vermeidet.³⁾

Die Brechungsexponenten für Jodsilber entnahm ich einer von Hrn. Dr. Scholl gezeichneten Dispersionskurve, die auf Grund der Wernickeschen Werte⁴⁾ gewonnen war.

Die optischen Eigenschaften des Kupferjodürs sind bisher nicht untersucht, ich mußte darum selbst Dispersionsmessungen anstellen. Diese wurden in bekannter Weise ausgeführt. Das

1) H. Boas, D. R. P. 82247.

2) P. Gräser, Beiträge zur Kenntnis der optischen Eigenschaften der Oxyde einiger Edelmetalle. Inaug.-Dissertation, Leipzig 1903.

3) H. Scholl, Wied. Ann. 68, p. 169. 1899.

4) W. Wernicke, Pogg. Ann. 159, p. 217. 1876.

bereits von Hrn. Gräser¹⁾ beschriebene Spektrometer war mit einem Rutherfordprisma versehen. Die Beleuchtung der Spiegel geschah durch eine Nernstlampe (ohne Heizspirale) vermitteltst eines total reflektierenden Prismas. Zur Dickenmessung diente in allen Fällen die Wienersche Methode.²⁾

Die im folgenden angegebenen Brechungsindizes sind die Mittel aus den an verschiedenen Spiegeln gemessenen Werten. Zum Vergleich habe ich die entsprechenden Zahlen des Silberjodids beigefügt.

λ	CuJ	AgJ	λ	CuJ	AgJ
660	1,935	2,145	550	2,00	2,205
650	1,94	2,15	540	2,005	2,215
640	1,945	2,155	530	2,015	2,225
630	1,95	2,16	520	2,02	2,24
620	1,955	2,165	510	2,03	2,255
610	1,96	2,17	500	2,04	2,27
600	1,965	2,175	490	2,055	2,285
590	1,97	2,18	480	2,07	2,30
580	1,975	2,185	470	2,09	2,33
570	1,98	2,19	460	2,11	2,365
560	1,99	2,20	450	2,135	2,42

Der Gang der Untersuchungen.

Auf dem zu messenden Spiegel wurde zunächst ein 2—3 mm breiter Streifen weggewischt. Senkrecht zu diesem wurden mit der Teilmaschine mehrere Marken eingeritzt. Die Untersuchungen selbst begannen mit den Dickenmessungen nach der Wienerschen Methode. Es wurde zunächst die Stelle maximaler Dicke M aufgesucht und gemessen. Darauf folgten die Dickenbestimmungen in den seitlichen Gebieten und zwar stets an solchen Stellen, die zu M äquidistant waren. Bezeichnet man die Dicken zweier derartig entsprechender Stellen mit d_1 und d_2 , so ergeben sich daraus die relativen Dicken des Spiegels:

$$\delta_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad \delta_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}.$$

1) P. Gräser, l. c. p. 12.

2) O. Wiener, Wied. Ann. 31. p. 635. 1887.

Jetzt war es möglich, die von der Theorie geforderten Werte der Hauptbrechungsexponenten durch die Wienerschen Formeln¹⁾ zu berechnen:

$$(1) \quad n_0^2 = \delta_1 n_1^2 + \delta_2 n_2^2,$$

$$(2) \quad \frac{1}{n_a^2} = \frac{\delta_1}{n_1^2} + \frac{\delta_2}{n_2^2}.$$

Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles n_0 wurde experimentell bestimmt vermittelst der im reflektierten, spektral zerlegten Lichte auftretenden Interferenzen, genau in derselben Weise, die zur Bestimmung der Brechungsindizes einfacher Spiegel dient. Für die Stelle M sowie für eine benachbarte, deren Dicke ebenfalls gemessen war, wurden die im Gesichtsfeld befindlichen Interferenzen bestimmt, und daraus die Brechungsexponenten berechnet. Auf Grund dieser Werte wurde eine Kurve gezeichnet; dieser wurden die Brechungsexponenten für die Wellenlängen von 10 zu 10 μ entnommen. Für diese Wellenlängen waren gleichzeitig die theoretischen Werte nach Formel (1) bestimmt worden, so daß eine unmittelbare Vergleichung möglich war.

Bei den geringen Unterschieden der Brechungsexponenten bilden diese Messungen noch keine genügende Bestätigung der Theorie. Diese liefert erst die Messung der Doppelbrechung und die daraus folgende Berechnung von n_a . Da die Phasendifferenz sich als Funktion von n_0 und n_a ausdrücken läßt, kann man unter Benutzung der für n_0 beobachteten Werte unmittelbar den Betrag von n_a finden.

Man läßt zu diesem Zwecke homogenes Licht den Spiegel durchsetzen und bestimmt den Gangunterschied der austretenden Strahlen durch die im nächsten Abschnitt zu beschreibende Methode. Zwischen dem so gefundenen Gangunterschied Δ und den Hauptbrechungsexponenten vermittelt die Formel für „Kristallplatten senkrecht zur Achse bei schief einfallendem Licht“.

Es sei d die Dicke, i der Einfallswinkel, n' der Brechungsexponent des einschließenden Mediums, so gilt

$$\Delta = \frac{d}{\lambda} \cdot \left\{ \sqrt{n_0^2 - n'^2 \sin^2 i} - \frac{n_0}{n_a} \cdot \sqrt{n_a^2 - n'^2 \sin^2 i} \right\}.$$

1) O. Wiener, Physik. Zeitschr. 5. p. 332. 1904.

Man ist jetzt berechtigt, beide Wurzeln zu entwickeln; da n_0^2 und n_a^2 in allen Fällen größer als 4, $n'^2 \sin^2 i$ stets weit kleiner als 0,5 ist, genügt es, die Reihe je auf die drei ersten Glieder zu beschränken.

Dann hat man:

$$\Delta = \frac{d}{\lambda} n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 - n_a^2}{2 n_0 n_a^2} \cdot \left[1 + n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 + n_a^2}{4 n_0^2 n_a^2} \right].$$

Zur Abkürzung ist im folgenden

$$\frac{n_0^2 - n_a^2}{2 n_0 n_a^2} = N,$$

$$1 + n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 + n_a^2}{4 n_0^2 n_a^2} = \eta$$

gesetzt. Die Ableitung der Formel geschieht aus den Grundlagen der Kristalloptik, worauf hier verwiesen werden muß.

Aus dem experimentell gefundenen Wert für Δ wurde dann rückwärts N und n_a berechnet, wobei für n_0 der beobachtete Wert, und für den Faktor η zunächst 1 gesetzt wurde. Aus N berechnet man sodann n_a , und vermittelt dieses Wertes fand man nun einen genaueren Wert für η . Unter Zugrundelegung dieses Wertes für η wurde die Rechnung nochmals durchgeführt, wodurch dann n_a mit genügender Genauigkeit gewonnen wurde.

Es war somit unmittelbarer Vergleich der berechneten und beobachteten Werte von n_a möglich.

Das Verfahren zur Messung der Doppelbrechung.

Die Messung der Gangunterschiede geschah vermittelt einer optischen Bank. Parallel gemachtes Bogenlicht traf nach Passieren eines Wassertroges, zweier Lichtfilter sowie des Polarisators auf den zu messenden Spiegel, der auf einem Tischchen angebracht war. Die Untersuchung des elliptisch polarisierten Strahles geschah durch einen Kompensator und Analysator.

Als Lichtfilter dienten drei verschiedene Kombinationen:

Für rotes Licht: Kupferoxydulglas, mittlere Wellenlänge gleich 657 $\mu\mu$.

Für grünes Licht: Zettnowsche¹⁾ Lösung in einer Schicht von 1 cm Dicke und grünes Glas (436^m), mittlere Wellenlänge gleich 556 $\mu\mu$.

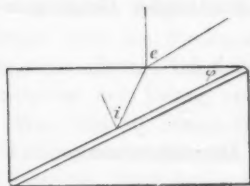
Für blaues Licht: Ammoniakalische Kupferlösung in einem Trog von 1 cm Dicke und zwei Blauviolettgläser, mittlere Wellenlänge gleich 460 $\mu\mu$.

Die mittleren Wellenlängen hatte ich mit dem Spektrometer, das zu den Dispersionsmessungen benutzt wurde, bestimmt.

Das zweite Filter bestand aus einem Jodsilberspiegel von 330 $\mu\mu$ Dicke zur Abschwächung der chemisch wirkenden Strahlen. Der Polarisator war mit zwei Fadenkreuzen und zwei Blenden von 5 mm Durchmesser versehen. Seine Schwingungsebene war um 45° gegen die Horizontale geneigt. Er konnte vermittelt einer Schlittenvorrichtung senkrecht zur optischen Bank verschoben werden.

Das Tischchen konnte sowohl um seine Achse gedreht, als auch senkrecht zur Bank bewegt werden. Die Größe der Drehungen und Verschiebungen wurden vermittelt Skala und Nonius abgelesen.

Mit Ausnahme der Stelle, an welcher die Messung vorgenommen werden sollte, wurde der zu untersuchende Spiegel mit schwarzem Papier bedeckt. Zweck Ablenkung der mehrfach reflektierten Strahlen war derselbe zwischen zwei identische Prismen mit Kanadabalsam gekittet (vgl. Figur). Die bei schiefer Inzidenz hierdurch bewirkte Parallelverschiebung des Lichtstrahles wurde dadurch ausgeglichen, daß der Polarisator soweit seitlich verschoben wurde, bis die Fadenkreuze desselben wieder mit dem des analysierenden Nikols zur Deckung kamen.



Zur Bestimmung der Gangunterschiede diente ein Glimmerkompensator. Derselbe bestand aus einem drehbar angeordneten Glimmerplättchen von geringem Gangunterschied. An

1) Nach der Angabe in Kaiserlings Praktikum der wissenschaftl. Photographie p. 13.

fangs benutzte ich ein Plättchen, für welches Hr. Kaempfer $\delta = 0,086 \lambda$ gefunden hatte.¹⁾ Später wurde ein zweites von Steeg & Reuter bezogen, dessen relative Beschleunigung ich zu $0,033 \lambda$ bestimmte.

Der Analysator war ebenfalls mit Fadenkreuz und Blenden versehen.

Der Einfallswinkel wurde auf folgende Weise gefunden: Zunächst wurde die Stellung des Tischchens ermittelt, für welche die Prismenfläche senkrecht zur Strahlenrichtung war. Dies geschah vermittelst des am Analysator befindlichen Fadenkreuzes in analoger Weise wie beim Gauss'schen Okular. Sodann wurde um einen bestimmten Winkel e gedreht. Bezeichnet φ den Keilwinkel (vgl. Figur), n' den Brechungsindex der Prismen, so findet man den Einfallswinkel i des im Glas auf die Schicht fallenden Strahles durch die Formel:

$$\sin i = \frac{1}{n'} \cdot [\sin e \cos \varphi + \sqrt{n'^2 - \sin^2 e} \cdot \sin \varphi].$$

Die Gangunterschiede wurden auf folgende Weise gemessen:

Kompensator und Analysator waren auf Dunkelheit eingestellt, dann wurde der Spiegel dazwischen gebracht und beide wurden so gedreht, bis das Gesichtsfeld wieder dunkel war. Aus den Drehwinkeln findet man die Phasendifferenz durch die folgenden Formeln:

$$(I) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \delta \cdot \sin 2 \gamma,$$

oder

$$(II) \quad \sin \varepsilon = \sin \delta \cdot \sin 2 \alpha.$$

Hier ist ε die gesuchte Phasendifferenz, γ der Winkel, um den der Kompensator aus der Ruhelage zu drehen ist, α der Winkel, um den der Analysator gegen den Kompensator verdreht wird, δ der Gangunterschied der beiden Komponenten im Glimmerplättchen.

Bezüglich der Ableitung dieser Formeln muß auf die Dissertation verwiesen werden.

Diese Formeln sind bei meiner Versuchsanordnung nur so lange gültig, als ordentlicher und außerordentlicher Strahl gleich stark absorbiert werden.

1) F. Kaempfer, Ann. d. Phys. 16. p. 318. 1905.

Da $\alpha > \gamma$ ist, wurde in den meisten Fällen Formel (II) bevorzugt, doch wurde zur Kontrolle auch mit der anderen Formel gerechnet. Die Genauigkeit der Messungen ist beschränkt durch die geringe Größe der zu messenden Winkel und durch die Unvollkommenheit der Lichtfilter.

Resultate.

Ich beschreibe im folgenden drei der von mir hergestellten Spiegel und die mit ihnen vorgenommenen Untersuchungen. Bei Herstellung der Spiegel eintretende Mißerfolge waren meistens durch eine dieser Ursachen bedingt:

1. Zerschneiden des eingeschlifenen Glasrohres infolge Mangel an Fett.
2. Zerspringen der verwendeten Spiegelglasplatte.
3. Abbröckeln des Metalles infolge zu hohen Entladungspotentialen, oder zu geringen Kathodenabstandes.
4. Zu hohes Vakuum, welches zur Folge hatte, daß der dunkle Kathodenraum bis zur Glasplatte sich erstreckte; dann entstanden Spiegel, welche in der Mitte geringere Dicke als am Rande besaßen.
5. Trübung beim Jodieren, trotz der erwähnten Vorsichtsmaßregeln, dadurch hervorgerufen, daß schon der Metallspiegel sich in einem Zustand der Auflockerung befand, was man aus diffuser Reflexion und geschwächtem Metallglanz erkennen konnte.

Aus diesen Gründen ist es erklärlich, warum von vielen hergestellten Spiegeln nur wenige zu Messungszwecken tauglich waren.

Spiegel VIII.

Das oben beschriebene Verfahren wurde derart angewendet, daß 100 mal mit den Kathoden gewechselt wurde, so daß man schließlich einen Lamellarkörper, bestehend aus 50 Silber- und 50 Kupferschichten erhielt. Jede Kathode wurde stets die gleiche Zeit lang, nämlich 1 Min. zerstäubt. Hierdurch erreichte man, daß alle Silberschichten unter sich, wie auch alle Kupferschichten unter sich von gleicher Dicke waren. Da aber unter sonst gleichen Versuchsbedingungen Silber in 3 bis

4 mal größeren Mengen zerstäubt als Kupfer¹⁾, so war es natürlich, daß die relativen Dicken sehr verschieden waren, wie die Messungen auch bestätigten.

Nach erfolgtem Jodieren zeigte der Spiegel eine gelbliche Farbe. Das Wegwischen des Streifens zur Dickenmessung mußte sehr vorsichtig und langsam geschehen, da sonst leicht größere Mengen der Substanz abbröckelten, und die Grenze unscharf wurde.

Da wegen zu großer Dicke Interferenzen nicht auftraten, mußte sich die Prüfung der Theorie auf den Vergleich der Phasendifferenzen beschränken. Die Dickenmessung an der Stelle maximaler Erhebung gab folgende Resultate:

a	λ	a'
9	647,6	2914
10	588,4	2942
11	527,2	2900

Mittel 2919 $\mu\mu$

In der Tabelle bezeichnet a den Unterschied der Ordnungszahlen für die Koinzidenz.

Die Dickenbestimmungen an je zwei zum Maximum äquidistanten Stellen der Gebiete b und c ergaben:

	AgJ	CuJ	δ_1	δ_2
1.	1004,0	386,1	0,732	0,268
2.	747,8	285,5	0,724	0,276
Mittel:			0,728	0,272

Hieraus berechnet sich die mittlere Dicke einer Jodsilberschicht zu 42,50 $\mu\mu$, einer Kupferjodürschicht zu 15,88 $\mu\mu$.

Nach der Fizeauschen Methode²⁾ kann man hieraus rückwärts die Dicke der ursprünglichen Metallschicht berechnen.

1) L. Holborn u. B. Austin, *Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 4. p. 104, 105, 113. 1904; G. Granquist, *Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh.* 1898. p. 709.

2) H. Fizeau, *Compt. rend.* 52. p. 274. 1861

Zwischen der Dicke d des Jodsilbers und derjenigen D des Metalles besteht die Relation:

$$D = \frac{d}{4,1} = 10,4 \mu\mu.$$

Analog für Kupfer:

$$D = \frac{d}{4,8} = 3,3 \mu\mu.^1)$$

Hieraus geht hervor, daß bei meinen Versuchen, im Gegensatz zu Angaben des Hrn. Houllevigue²⁾, Silber- und Kupferlamellen von weit unter 50 $\mu\mu$ Dicke durch Joddämpfe umgewandelt worden sind.

Die Doppelbrechung wurde für je einen Einfallswinkel geprüft. Es war

$$e = -57,87^\circ,$$

woraus sich

$$i = 22,06^\circ,$$

$$\text{bez.} = 21,93^\circ,$$

$$\text{bez.} = 21,81^\circ$$

berechnet, wobei für die aufgekitteten Prismen

$$\varphi = 11,80^\circ \text{ und } n_r = 1,520,$$

$$n_{gr} = 1,525,$$

$$n_b = 1,530$$

gefunden war.

Da die Beobachtungen in kürzerer Zeit erfolgen mußten, beschränkte ich mich auf die Ablesung am Kompensator, d. h. auf Anwendung der Formel (I). Die Resultate finden sich in folgenden Tabellen.

Berechnete Phasendifferenzen.

λ	n_1	n_2	n_3	n_a	d
675	2,145	1,935	2,090	2,081	0,0031
556	2,200	1,995	2,146	2,138	0,0031
460	2,365	2,110	2,298	2,287	0,0048

1) Das spezifische Gewicht des Kupferjodürs ist gleich 5,6 gesetzt, als das Mittel der von Spring (Trav. chim. d. Pays-Bas 20. p. 80. 1901) angegebenen Werte. Die Dichte des Jodsilbers ist 5,6.

2) L. Houllevigue, Boltzmann-Festschrift p. 62. 1904.

Beobachtete Phasendifferenzen.

λ	γ	s	Δ	Abweich.
657	0,916°	1,102°	0,0031	0 %
556	0,950	1,143	0,0032	3
460	1,549	1,862	0,0052	8

Die Werte γ sind die Mittel aus 6—7 Einstellungen. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist genügend, wenn man berücksichtigt, daß die möglichen Beobachtungsfehler über 10 Proz. betragen.

Spiegel X.

Um einen Lamellarkörper von geringerer Dicke zu gewinnen, wechselte ich nur 70mal mit den Elektroden, so daß je 35 Schichten Silber und Kupfer niedergeschlagen wurden. Damit ferner möglichst große Doppelbrechung erzielt würde, war ich bestrebt, die Silberjodidschichten von der gleichen Dicke wie die Kupferjodürschichten herzustellen, da für $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}$ die Doppelbrechung ihr Maximum besitzt.

Der jodierte Spiegel besaß sehr geringe Absorption, die Farbe war bräunlich gelb; die Newtonschen Farben waren nur von der Glasseite zu sehen.

Die Dickenbestimmung geschah an der Stelle maximaler Erhebung sowohl an der oberen wie der unteren Grenzlinie des weggewischten Streifens.

Die Resultate sind:

Oberhalb des Streifens: 2137 $\mu\mu$,

Unterhalb des Streifens: 2163 $\mu\mu$.

Für die relativen Dicken ermittelte ich folgende Werte:

$\delta_1 = 0,496$ für Jodsilber,

$\delta_2 = 0,504$ für Kupferjodür.

Für die an der oberen Grenzlinie gemessene Stelle ergibt sich hieraus:

Die mittlere Dicke einer Jodsilberschicht = 30,29 $\mu\mu$,

„ „ „ „ Kupferjodürschicht = 30,77 $\mu\mu$.

Die Bestimmung der Interferenzen erfolgte an den Stellen mit der Dicke 2137 und 2163 $\mu\mu$.

Auf Grund dieser Beobachtungen wurde eine Dispersionskurve gezeichnet; derselben sind die nachfolgenden Brechungs-exponenten entnommen, zum Vergleich mit den berechneten.

λ	n_0 (beob.)	n_0 (ber.)	Differenz
650	2,047	2,047	0,000
640	2,051	2,051	0,000
630	2,056	2,057	-0,001
620	2,061	2,062	-0,001
610	2,065	2,067	-0,002
600	2,070	2,072	-0,002
590	2,075	2,077	-0,002
580	2,080	2,082	-0,002
570	2,087	2,087	0,000
560	2,094	2,097	-0,003
550	2,101	2,104	-0,003
540	2,109	2,112	-0,003
530	2,118	2,122	-0,004
520	2,129	2,132	-0,003
510	2,145	2,142	0,003
500	2,157	2,157	0,000
490	2,174	2,172	0,002
480	2,192	2,187	0,005
470	2,214	2,212	0,002
460	2,236	2,240	-0,004
450	2,275	2,281	-0,006

Die Übereinstimmung dieser Werte ist befriedigend; doch berechtigen sie noch nicht auf die Richtigkeit der Theorie zu schließen, maßgebend ist vielmehr erst die Bestimmung der Gangunterschiede.

Die Doppelbrechung wurde an der Stelle $d = 2137$ gemessen und zwar bei jeder der drei Wellenlängen stets für je zwei verschiedene Einfallswinkel; es war:

$$1. \quad e = 22,16^\circ, \quad 2. \quad e = 17,66^\circ.$$

Ursprüngliche Absicht war, bei möglichst schiefer Incidenz zu beobachten. Dies ließ sich aber nicht ermöglichen, da man bei größeren Einfallswinkeln als den verwendeten ein zu dunkles Gesichtsfeld erhielt.

Es waren die gleichen Prismen wie bei Spiegel VIII aufgeklebt. Dann folgt:

$$1. \quad i = 26,17^\circ \text{ bez. } = 26,12^\circ \text{ bez. } = 26,07^\circ,$$

$$2. \quad i = 23,31^\circ \text{ bez. } = 23,27^\circ \text{ bez. } = 23,24^\circ.$$

Die Einstellungen wurden sowohl am Kompensator wie am Analysator abgelesen, doch wurde der Auswertung, ab-

gesehen von einigen Kontrollrechnungen, stets die Formel (II) zugrunde gelegt. Die Absorption darf wegen ihres geringen Betrages bei der Rechnung vernachlässigt werden.

In der folgenden Tabelle sind die Zeilen, welche die berechneten Werte enthalten, von links nach rechts, und die, welche die Beobachtungen darstellen, von rechts nach links zu lesen.

Die Unterschiede zwischen Theorie und Experiment sind bei den Gangunterschieden in Prozenten, bei den Brechungs-exponenten in Einheiten der dritten Dezimale angegeben.

λ	i		n_1	n_2	n_o	n_e	Δ	s	α
657	26,17°	ber.	2,145	1,935	2,031	2,042	0,0040		
		beob.			2,034	2,044	0,0038	1,358°	1,317°
		Diff.			-0,003		5 %		
	23,31	ber.	2,145	1,935	2,031	2,042	0,0032		
		beob.			2,034	2,044	0,0029	1,040	1,009
		Diff.			-0,003		10 %		
556	26,12	ber.	2,200	1,995	2,089	2,099	0,0042		
		beob.			2,088	2,097	0,0039	1,892	1,850
		Diff.			0,001		8 %		
	23,27	ber.	2,200	1,995	2,089	2,099	0,0034		
		beob.			2,087	2,097	0,0034	1,223	1,186
		Diff.			0,002		0 %		
460	26,07	ber.	2,365	2,110	2,226	2,240	0,0064		
		beob.			2,223	2,236	0,0059	2,139	2,076
		Diff.			0,003		8 %		
	23,24	ber.	2,365	2,110	2,226	2,240	0,0051		
		beob.			2,222	2,236	0,0048	1,722	1,671
		Diff.			0,003		6 %		

Die angegebenen Werte α sind die Mittel aus 6—8 Einstellungen.

Die Abweichungen der obigen Werte liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, welche durchschnittlich 9—10 Proz. betragen.

Spiegel XIII.

Es wurde jedes Metall 1 Min. zerstäubt unter 80maligem Wechsel, sonst in gleicher Weise wie bei den vorigen Exemplaren. Die Silberelektrode besaß diesmal größeren Abstand

von der Unterlage, infolgedessen bestand der Spiegel zum größeren Teile aus Kupferjodür.

Die Dickenbestimmung ergab an der Grenzlinie:

Oberhalb des weggewischten Streifens den Wert 2211,

Unterhalb „ „ „ „ „ 2179.

Die relativen Dicken bestimmte ich zu:

$\delta_1 = 0,314$ für Jodsilber,

$\delta_2 = 0,686$ „ Kupferjodür.

Für die Stelle $d = 2211$ ergibt sich somit:

17,35 $\mu\mu$ als mittlere Dicke einer Jodsilberschicht,

37,93 $\mu\mu$ „ „ „ „ Kupferjodürschicht.

Die Dispersionskurve wurde auf Grund von Interferenzbeobachtungen bei den Dicken 2179 $\mu\mu$ und 2211 $\mu\mu$ aufgestellt und daraus wurden folgende Werte interpoliert und mit den berechneten verglichen:

λ	n_0 (beob.)	n_0 (ber.)	Differenz
650	2,010	2,008	0,002
640	2,014	2,013	0,001
630	2,019	2,018	0,001
620	2,023	2,023	0,000
610	2,027	2,028	-0,001
600	2,032	2,033	-0,001
590	2,037	2,038	-0,001
580	2,043	2,043	0,000
570	2,049	2,048	0,001
560	2,056	2,058	-0,002
550	2,063	2,067	-0,004
540	2,071	2,073	-0,002
530	2,081	2,083	-0,002
520	2,092	2,093	-0,001
510	2,102	2,103	-0,001
500	2,113	2,115	-0,002
490	2,128	2,130	-0,002
480	2,149	2,145	0,004
470	2,173	2,168	0,005
460	2,196	2,193	0,003
450	2,225	2,228	-0,003

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist hinreichend.

Die Gangunterschiede wurden an der Stelle $d = 2211$ bestimmt und zwar für die Winkel:

$$1. e = 10,40^\circ, \quad 2. e = 5,40^\circ.$$

Die verwendeten Prismen waren von der Firma Zeiss geliefert. Sie besaßen den brechenden Winkel $\varphi = 21,88^\circ$ und die Brechungsindizes:

$$n_r = 1,519,$$

$$n_{gr} = 1,521,$$

$$n_b = 1,528.$$

Hieraus berechnen sich die Einfallswinkel zu

$$1. i = 28,70^\circ \text{ bez. } 28,67^\circ \text{ bez. } 28,66^\circ$$

und

$$2. i = 25,43^\circ \text{ bez. } 25,42^\circ \text{ bez. } 25,41^\circ.$$

Die Einstellungen wurden am Kompensator und am Analysator abgelesen, die Phasendifferenz wurde nach Formel (I) und (II) berechnet und der Mittelwert genommen. Als Kompensator diente das letztere der erwähnten Glimmerplättchen.

λ	i		n_1	n_2	n_a	n_o	d	e	α	γ
657	28,70°	ber.	2,145	1,935	1,994	2,003	0,0044			
		beob.			1,998	2,007	0,0041	1,474°	3,616°	3,534°
		Diff.			-0,004		7 %			
	25,43°	ber.	2,145	1,935	1,994	2,003	0,0035			
		beob.			1,998	2,007	0,0034	1,208	2,934	2,917
		Diff.			-0,004		3 %			
556	28,67°	ber.	2,200	1,995	2,053	2,062	0,0048			
		beob.			2,050	2,059	0,0048	1,709	4,284	4,016
		Diff.			0,003		0 %			
	25,42°	ber.	2,200	1,995	2,053	2,062	0,0038			
		beob.			2,050	2,059	0,0039	1,388	3,449	3,233
		Diff.			0,003		3 %			
460	28,66°	ber.	2,365	2,110	2,181	2,193	0,0070	2,513	6,033	6,216
		beob.			2,183	2,196	0,0070			
		Diff.			-0,002		0 %			
	25,41°	ber.	2,365	2,110	2,181	2,193	0,0055	2,052	5,065	4,916
		beob.			2,183	2,196	0,0057			
		Diff.			-0,002		4 %			

Auch für diesen Spiegel besteht gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie; die Abweichungen betragen durchschnittlich 3—4 Proz., liegen also innerhalb der Beobachtungsfehler, welche hier ca. 6 Proz. betragen.

Schluß.

Das hauptsächlichste Ergebnis meiner Versuche ist dahin zusammenzufassen, daß die qualitative und quantitative Richtigkeit der Wienerschen Theorie für durchsichtige Medien erwiesen ist, wenigstens insoweit, als die Dicken der einzelnen Lamellen zwischen 15,9 und 42,5 μ liegen.

Diese Untersuchung wurde in den Jahren 1908—1905 im physikalischen Institut der Universität Leipzig auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. Wiener ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm sowie Hrn. Privatdozent Dr. Scholl für die fortgesetzte lebenswürdige Unterstützung und Förderung der Arbeit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 17. November 1905.)

9. Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen; von Max Wien.

Hr. Wiersch hat kürzlich¹⁾ darauf hingewiesen, daß man beim Telephonieren eine deutlichere Sprache erzielen könne, wenn man Platten verwendet, deren Eigentöne wesentlich höher liegen, wie bisher üblich, so daß sie etwa in den Bereich der Schwingungszahlen der Zischlaute der menschlichen Sprache fallen.

Bei Gelegenheit einer physiologischen Untersuchung²⁾ habe ich vor einiger Zeit kleine Telephone mit Platten von 1 cm und 0,5 cm Durchmesser bei 0,2 und 0,08 mm Dicke verwendet, deren tiefster Eigenton 12000 bez. 20000 Schwingungen in der Sekunde besaß.

Von denselben Überlegungen ausgehend wie Hr. Wiersch hat ich Hrn. Prof. Dolezalek, welcher damals gerade mit der Untersuchung der Telephonie durch Pupinkabel beschäftigt war, diese Telephone auf ihre Sprachübertragung hin zu prüfen. Das Resultat der Versuche war, daß die Telephone allerdings eine sehr deutliche Übertragung ermöglichen, sie jedoch wegen der sehr geringen Intensität praktisch nicht gut verwendbar sein würden, da nur bei großer Stille und für ein geübtes Ohr die Sprache vernehmbar war.

Über den Grad dieser Verminderung der Tonintensität kann man sich in folgender Art ein Bild machen: Bei fest an das Ohr gedrücktem Telephon ist die Tonintensität für alle Töne bei gleicher Amplitude der Platte dieselbe und dem Quadrat der Amplitude proportional. Ist demnach n die Schwingungszahl des zu übertragenden Tones, p die des tiefsten Eigentones der Platte, so ist die Intensität prop. $\frac{1}{(n^2 - p^2)^2}$, wobei die Dämpfung vernachlässigt, und nur der tiefste Eigenton berücksichtigt ist.

1) E. Wiersch, Ann. d. Phys. 17. p. 999. 1905.

2) M. Wien, Pfügers Arch. 97. p. 1. 1908.

Solange n^2 klein neben p^2 ist, d. h. praktisch für alle tieferen Töne bis in die Nähe des ersten Eigentones ist die Tonintensität prop. $1/p^4$. Der tiefste Eigenton der gebräuchlichen Platten liegt etwa bei 700 Schwingungen pro Sekunde, danach ist die Intensität prop. $1/700^4$. Herr Wiersch will Platten anwenden, deren tiefster Eigenton mindestens die zirka zehnfache Schwingungszahl, also 7000 besitzt, dann ist die Intensität prop. $1/7000^4$, also für tiefe Töne unter sonst gleichen Umständen 10000mal kleiner als bei den gebräuchlichen Telephonen. Nimmt man den Eigenton noch eine Oktave höher, so sinkt die Intensität auf $1/160000$!

In den Bereich der mittleren Schwingungszahlen von 500 bis 5000 fallen die tiefsten und ausgeprägtesten Eigentöne der gebräuchlichen Platten. Die Reproduktion der Töne ist daher in diesem Gebiet ungleichmäßig stark, je nachdem die Töne in der Nähe einer Eigenschwingung liegen oder weiter entfernt sind. Im großen ganzen jedoch ist die Tonwiedergabe sehr laut. Die Eigenschwingungen stören besonders bei den Vokalklängen, deren charakteristische Töne meist in diesen Tonbereich fallen, da wegen der längeren Dauer der Vokalklänge die Resonanz sich voll ausbilden kann, während bei den schnell gedämpften charakteristischen Tönen der Konsonanten dies weniger zu befürchten ist. Das Wierschsche Telephon überträgt alle diese Töne noch gleichmäßig schwach, und zwar dürfte die Verringerung der Intensität gegenüber dem gebräuchlichen Telephon im Durchschnitt mindestens dieselbe sein, wie die obige bei den tiefen Tönen.

Erst bei den ganz hohen Tönen kommen die Eigentöne des Wierschschen Telephons zur Geltung; jedoch werden nicht etwa alle Töne dieses Gebietes gleichmäßig verstärkt, sondern vor allem die Umgebung der Eigenschwingungen. Also, wenn wir den Grundton der Platte zu 7000 annehmen, außer dem Tonbereich um 7000 noch derjenige um die zweite Eigenperiode die über eine Oktave höher liegen würde. Die weiteren Eigentöne dürften schon über die Gehörgrenze hinaus fallen. Immerhin wird das ganze Gebiet der höchsten Töne hier stark hervorgehoben werden, während bei den bisherigen Telephonen die höheren Eigentöne nur wenig ausgebildet, und deshalb die ganz hohen Töne relativ sehr schwach durch sie übertragen werden.

Die Folge davon ist, daß sie oft durch die stärkeren, tiefen Töne und die störenden, vielfach gellend hervortretenden Eigentöne der Platte unterdrückt werden, und die Zischlaute und einige andere Konsonanten, deren charakteristische Töne sehr hoch liegen, schlecht zu verstehen sind.

Unzweifelhaft sind für eine *deutliche* Sprachübertragung bei dem Wierschischen Telephon alle Vorbedingungen erfüllt: gleichmäßige Intensität aller tieferen und mittleren Töne ohne störende Eigentöne, und relative Verstärkung der wichtigen höchsten Töne. Auf der anderen Seite steht die prinzipielle Schwierigkeit der *außerordentlichen Schwächung der tiefen und mittleren Töne*, auf denen schließlich doch die Mehrzahl unserer Sprachlaute beruht. Es steht zu befürchten, daß diese Schwächung auch nicht annähernd durch technische Vervollkommnung wiederausgeglichen werden kann. Im praktischen Gebrauch wird daher wohl meist die lautere Übertragung der üblichen Telephone vorgezogen werden, wenn auch einzelne Konsonanten schlecht ausgebildet sind und erraten werden müssen; die Anwendung der Telephone mit hohen Eigentönen dürfte auf besondere Fälle beschränkt bleiben, in denen eine ganz reine Übertragung erwünscht ist, und die äußeren Umstände eine besonders starke Übertragung der Telephonströme ermöglichen.

Übrigens kann man eine ähnliche Verschiebung der Tonintensität nach den hohen Tönen hin bei jedem Telephon in einfachster Weise bewirken, indem man das Telephon nicht fest an das Ohr hält, sondern in einige Entfernung von dem Ohr bringt. Die Tonintensität — Energie pro Flächeneinheit —, welche von einer schwingenden Platte vom Radius R , deren Mitte die Amplitude a macht, an einen Punkt in der Entfernung ϱ gelangt, ist

$$= 6,6 \cdot 10^{-7} \frac{R^4}{\varrho^2} \cdot a^2 \cdot N^4 \cdot \text{Erg.}^1),$$

steigt also porportional der vierten Potenz der Schwingungs-

1) M. Wien, l. c. p. 46. Die Formel ist eigentlich für eine Platte abgeleitet, die sich in einer sonst starren Ebene befindet, durch die der Raum in zwei Hälften geteilt wird. Die Proportionalität der Intensität mit N^4 , worauf es hier allein ankommt, dürfte von dieser Bedingung unabhängig sein.

zahl N^1), während, wie oben erwähnt, bei fest an das Ohr gedrücktem Telephon für die gleiche Amplitude a die Intensität für alle Schwingungszahlen die gleiche ist. Wenn man das Telephon vom Ohre entfernt, so tritt eine Schwächung aller Töne ein, dieselbe ist aber sehr viel größer für die tiefen Töne wie für die hohen. Man kann diese Erscheinung am besten verfolgen, wenn man das Telephon mit der sekundären Spule eines kleinen Induktoriums verbindet, in dessen primärer Spule ein schwacher Strom etwa 100mal in der Sekunde unterbrochen wird. Bei fest an das Ohr gehaltenem Telephon hört man stark den Grundton und die ersten Obertöne, dann schwächer eine große Zahl höherer Obertöne und schließlich das eigentümliche Surren des Telephons, das bei der Einstellung nach der Kohlrauschschen Methode der Messung von Flüssigkeitswiderständen eine Rolle spielt. Dasselbe rührt von den schnell gedämpften ganz hohen Schwingungen her, welche in dem Moment der Unterbrechung entstehen. Hält man das Telephon nur noch lose an das Ohr, so merkt man eine starke Schwächung der tiefen Töne; entfernt man es weiter und weiter, so verschwinden allmählich alle musikalischen Töne, und es bleibt nur jenes Surren übrig, das ziemlich weit hörbar ist, und aus einigen Zentimetern Entfernung charakteristischweise nicht viel schwächer erscheint, als bei direkt an das Ohr gehaltenem Telephon.

Bei der Sprache erkennt man bei genügend lauter Übertragung ebenfalls leicht die Änderung der Klangfarbe, wenn man das Telephon vom Ohr entfernt. Auch scheint die Sprache deutlicher zu werden, wenigstens verstehe ich — genügende Intensität und Abwesenheit stärkerer Nebengeräusche vorausgesetzt — leichter, wenn ich das Telephon einige Zentimeter vom Ohr fern halte, und erkenne auch besser die Stimme des Sprechenden. Die Verbesserung ist jedoch nicht so groß, wie jene, welche durch die Verwendung von Platten mit hohen Eigentönen hervorgerufen wird, weil die störende Wirkung der tieferen Eigentöne der Platte zwar vermindert wird, aber nicht ganz fortfällt, wie bei diesen.

1) In dieser Bevorzugung der hohen Töne scheint mir auch eine prinzipielle Schwierigkeit bei der Reproduktion der Sprache und Musik durch Phonograph und Grammophon zu liegen.

Im Vorstehenden ist gezeigt, daß durch Verwendung von Platten mit hohen Eigentönen oder durch Entfernung des Telephons vom Ohr und auch bei dem Phonographen die relative Intensität der Töne verschiedener Höhe durchaus verändert wird, so daß das Intensitätsverhältnis der ganz hohen Töne zu den tiefen auf das 100 000fache und darüber gesteigert werden kann. Es ist sehr auffallend, daß die Sprache und ihre Deutlichkeit dadurch nicht in noch viel höherem Grade beeinflusst wird, als es geschieht. Dem unbefangenen Beobachter wird der Einfluß auf die Klangfarbe auffallen, im ganzen aber die Sprache durchaus nicht etwa von Grund aus verändert erscheinen. Dieselbe Erfahrung macht man, wenn man die Telephonströme auf elektrischem Wege beeinflusst, indem man Kondensatoren oder Selbstinduktionsspulen in den Stromkreis einschaltet und dadurch die Übertragung der Töne verschiedener Höhe verändert.¹⁾ Das menschliche Ohr erweist sich mithin hier, wie auch sonst, als recht unempfindlich für Intensitätsunterschiede.

Es erscheint mir hiernach ausgeschlossen, daß das Charakteristische der menschlichen Sprache im wesentlichen im Verhältnis der Intensitäten der Töne, aus denen die verschiedenen Laute bestehen, zu suchen ist, und eine Untersuchung der Sprache, die sich auf die Messung der Amplituden der die Sprache bildenden Töne durch harmonische Analyse beschränkt, ist durchaus unzureichend. Viel hervorragenderen Anteil an der Deutlichkeit der Sprache müssen ganz andere Dinge haben — wie z. B. der Grad der Dämpfung der einzelnen Töne oder das Auftreten und Verschwinden gewisser Töne in bestimmten Zeitintervallen — und für dieses, im wesentlichen noch unbekannte, eigentliche Charakteristische der Sprache muß das Ohr eine erstaunliche Empfindlichkeit besitzen, so daß die Sprache verständlich bleibt, wenn auch die relative Intensität der einzelnen Töne total verändert wird.

Danzig, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, 22. Nov. 1905.

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 4. p. 450. 1901.

(Eingegangen 24. November 1905.)

10. *Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug
der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz;
von W. Holtz.*

Die Reibzeugflügel sind eine Erfindung des Engländers Nooth. Beccaria¹⁾ hatte auf die Lichtlinie hingewiesen, dort wo der rotierende Isolator das Reibzeug verlasse, und sie aus der vom Glase nach dem Kissen zurückströmenden Elektrizität erklärt. Hierauf setzte Nooth²⁾, um solches zu verhüten, dem Reibzeug Stücke von Seidenzeug oder Wachstaffet an und fand, daß die Maschine so in der Tat kräftiger wirke. Um die Ursache dieser verstärkten Wirkung weiter aufzuklären, änderte Nicholson³⁾ die Flügel in verschiedener Weise ab und meinte, daß sie namentlich um deshalb besser wirken, weil sie, wie das Reibzeug, negativ elektrisch seien. Später erklärte man ihre günstige Wirkung mehr daraus, daß so eine Zerstreuung der Elektrizität in die Luft vermieden würde. 1879 kam Helmholtz⁴⁾, ohne vorgenannte Arbeiten zu erwähnen, in einem Aufsatz über elektrische Grenzsichten auch auf die Flügel des Reibzeuges zu sprechen, deren Zweck sei, daß sie, mit jenem gleichmäßig elektrisch, die Spannung seiner Endkante an das Ende eines Isolators verschöben. Gleichwohl wird noch heute in physikalischen Lehrbüchern ihr Zweck so gedeutet, daß sie eine Zerstreuung der Elektrizität verhüten sollen.

Daß letzteres unrichtig ist, sieht man zunächst daran, daß die Länge sehr wenig zur Verstärkung der Wirkung tut, daß nämlich, wenn sie auch nur 3 cm das Reibzeug überragen, der Effekt fast derselbe ist, als wenn sie bis an die Einsauger gehn, und ganz derselbe, wenn nur dafür gesorgt wird, daß die kurzen Flügel dem Glase so gut anliegen, als es die längeren tun. Hieraus folgt, daß sie nur dadurch wirken können, daß

1) Beccaria, Phil. Trans. 56. p. 117. 1766.

2) Nooth, ebenda 63. p. 333. 1773.

3) Nicholson, ebenda 79. p. 265. 1789.

4) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 337. 1879.

sie dem Zurückströmen der Elektrizität nach dem Reibzeuge hinderlich sind. Und dieser Effekt erklärt sich am besten so: Die amalgamierte Fläche ist ein Stück Leiter und an den Kanten eines solchen ist die Dichte besonders groß. Die übrigen Kanten kommen nicht weiter in Betracht, wohl aber jene, wo der geriebene Isolator das Kissen verläßt. Schließt sich an letztere ein Stück Wachstaffet oder Seide, so wird dieses, wenngleich isolierend, doch nach und nach mit negativ elektrisch werden und so die Dichte an jener Kante verkleinern, weil sie nun nicht mehr am Ende, sondern in der Mitte einer elektrischen Fläche liegt. Das geschieht freilich gleichfalls und noch besser, wenn statt Wachstaffet oder Seide ein Stück Papier genommen wird, da die Endkante des letzteren wegen der schlechten Leitungsfähigkeit des Materiales nicht weiter gefährlich ist. Die Wirkung ist in der Tat die gleiche, wie ich gelegentlich schon hervorhob¹⁾, zumal wenn man Seidenpapier nimmt, und wenn man dies bisher wenig nachmachte, so mag man wohl wegen der Vergänglichkeit des Papiers davon Abstand genommen haben. Bei Wachstaffet oder Seide könnte die negative Elektrizität auch aus der Luft herbeigezogen sich an die Außenseite der Zeuge setzen. Sie würde dann ähnlich wirken, wie wenn sie an der Innenseite säße und sich hier durch Leitung verbreitet hätte.

Kommt es aber nur darauf an, die Scheibe vor der schädlichen Wirkung der fraglichen Endkante zu schützen, so kann dies auch noch auf andere Weise geschehen, nämlich dadurch, daß man die leitende Fläche umbiegt, was freilich mit einer Amalgamfläche nicht gut tunlich ist. Um dies zu prüfen, nahm ich zwei dünne Kupferbleche, deren eines Ende zylindrisch umgebogen war, und hielt sie mit den Händen im Sinne wie die Figur zeigt, an die Glasscheibe, während ein anderer diese rotieren ließ. Ich erzeugte so 3 cm lange Funken, während es überhaupt keine Funken gab, wenn ich die Bleche umgedreht hielt. Dann nahm ich statt der Kupferbleche gleichgeformte Kartonstücke. Hier war der Unterschied beim Wechsel der




1) W. Holtz, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 6. p. 302.

Lage natürlich weniger groß, weil auch die anliegende Kante, eben weil sie die Kante eines Halbleiters war, noch eine leidliche Wirkung gab. In der günstigen Lage erhielt ich 4 cm lange Funken, aber nicht viele, da der Karton für die Elektrizitätserzeugung nicht leitend genug war. Ich legte nun auf beide unechtes Silberpapier, aber so, daß dieses oben und unten kürzer war und auch nicht bis zur Biegung reichte. Dann kniffte ich das gerade Ende um und heftete dieses mit Leim der Hinterkante der hölzernen Reibzeuge an. Ich erhielt so zwischen kleinen 6 cm voneinander entfernten Kugeln einen konstanten Büschelstrom und bei vergrößertem Kontaktor 10 cm lange Funken mit einer Scheibe von nur 30 cm Durchmesser, also eine Wirkung, wie ich sie kräftiger gar nicht erwarten konnte. Und doch war die Zerstreuung der Elektrizität hier durch nichts verhütet, und die Scheibe drehte sich sehr leicht, weil kein Fett und keine anklebenden Flügel ihre Bewegung hemmten. Noch stärker war die Wirkung, als ich je ein Quecksilbertröpfchen mit dem Finger auf dem Silberpapier verrieb. Aber dies vergrößerte die Reibung. Auch empfehle ich es um deswillen nicht, weil man dann, wenn die Maschine längere Zeit nicht gebraucht ist, das Silberpapier wieder erneuern muß.

Die fragliche Rundung spielt auch sonst noch eine Rolle. Streiche ich mit der unteren Kante meiner rechten Hand über eine Ebonitplatte, so wird diese stark elektrisch, weil die runde Form das Zurückströmen der Elektrizität erschwert. Lasse ich gepulverte Körper, auch Metallfeilicht auf einem schräg gestellten Blechstreifen niedergleiten, so zeigen sie sich, isoliert aufgefangen, stärker elektrisch, wenn das untere Ende rund umgebogen ist. Bei einer Reihe von Kupfermünzen, welche so auf einem schrägen Zinkstreifen in eine isolierte Metallschale gleiten, erhalte ich am Elektroskop einen kleinen Ausschlag, nicht jedoch, wenn der Streifen unten gerade gelassen ist.

(Eingegangen 25. November 1905.)

**11. Die Trichterventilröhre
beim Wechsel von Druck und Funkenart;
von W. Holtz.**

Ich habe der Trichterröhre, seit sie zuerst bekannt wurde¹⁾, im Verlaufe der Zeit verschiedene Formen gegeben, deren einfachste die nebenstehende Figur zeigt. Sie ist zugleich die empfehlenswerteste, da kompliziertere Formen nur wenig besser wirken. Ich selber gab über die Röhre nur zwei kurze Mitteilungen.²⁾ In der ersten sprach ich mich über die bevorzugte Stromrichtung  nicht aus. In der zweiten sagte ich, daß verzögerte Flaschenentladungen denjenigen Trichter bevorzugen, dessen Basis der positiven Elektrode zugewandt sei. Poggendorff³⁾ stellte über die Röhren eine längere Untersuchung an, in welcher er nur solche mit mehreren Scheidewänden und einseitig gerichteten Trichtern benutzte, von denen er eventuell zwei entgegengerichtete nebeneinander legte. Er fand aber, daß die verschiedensten Entladungen allemal eher hindurchgingen, wenn die Trichterspitze der positiven Elektrode zugewandt sei. Alle Röhren waren so weit evakuiert, wie ich empfohlen hatte, nämlich so, daß sie die Schichtung zeigten. Als ich kürzlich sah, daß Poggendorffs und meine Angaben sich widersprachen, dachte ich, daß meine Röhre ehemals vielleicht Luft gesogen habe, und daß sich die Röhren bei verschiedenen Drucken vielleicht anders verhalten könnten. Dies veranlaßte mich die nachfolgenden Versuche anzustellen.

Ich ließ mir von Geisslers Nachfolger Hrn. Müller in Bonn drei sonst gleiche Röhren nach Art obenstehender Figur machen, aber ungleich evakuiert, so daß die eine noch

1) Vgl. Poggendorffs Referat in den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom Juli 1867.

2) W. Holtz, Pogg. Ann. 155. p. 643. 1875 und Wied. Ann. 10. p. 336. 1880.

3) J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. 134. p. 1. 1868.

ein zusammenhängendes Band, die zweite Schichtung, die dritte die Hittorf-Crookes'schen Lichterscheinungen gab. Ich nenne sie der Reihe nach *A*, *B* und *C*; sie waren 25 cm lang, 5 cm weit und übrigens mit Luft gefüllt. Es war nur ein kleiner Induktionsapparat, den ich gebrauchte, und er wirkte nur durch ein Leclanchéelement. So ist es am günstigsten, weil bei größeren Apparaten oder größerer Triebkraft der Schließungsstrom mit passiert, wobei dann natürlich beide Trichter leuchten. Bei der Influenzmaschine wandte ich entweder verzögerte Flaschenentladungen, oder den bloßen Konduktorenstrom und diesen konstant oder mit eingeschalteter Luftstrecke an.

Beim Induktionsapparat zeigte die Röhre *A* deutlich, daß der Strom eher den Trichter passierte, dessen Basis der positiven Elektrode zugerichtet war. Nur sporadisch leuchtete der andere mit, aber viel schwächer. Am deutlichsten trat der Unterschied bei wiederholtem Gebrauche des Kommutators vor Augen. Die Röhre *B* dagegen verhielt sich, wie Poggen-dorff angab; der Strom ging nur durch jenen Trichter, dessen Spitze der positiven Elektrode zugerichtet war. Hierbei zeigte sich nur in der positiven Kammer Schichtung, in beiden aber ein dunkler Raum, der in der positiven zwischen dem aus dem Trichter tretenden Büschel und den vor dem Drahte schwebenden Schichten lag. Die Röhre *C* verhielt sich der Hauptsache nach ähnlich; die Entladungen gingen vorzugsweise durch den Trichter, dessen Spitze nach der positiven Elektrode sah, und nur sporadisch leuchtete der andere mit. Der Büschel der Trichterspitze war übrigens länger und nicht rötlich, sondern mehr grau. In der negativen Kammer erschien nur grünes Phosphoreszenzlicht, in der positiven außer dem Büschel noch ein der Drahtspitze anhaftender Nebelfleck.

Bei verzögerten Flaschenentladungen, wobei ich schwach angefeuchtete Schnüre gebrauchte, waren die Erscheinungen den eben erwähnten so ähnlich, daß ich darüber nicht weiter sprechen will.

Bei konstantem Strom und der Röhre *A* sah man nur vier helle Stellen, die beiden Trichterspitzen, einen leuchtenden Überzug der positiven Drahtspitze und ein der negativen anhaftendes unruhiges Flämmchen von rötlichem Licht. Bei Ein-

schaltung einer Luftstrecke veränderte sich das Bild. Die Röhre füllte sich mit nebelhaftem rötlichgrauem Licht, der negative Draht erhielt einen blauen Überzug und die ihn umgebende Glaswand fing zu phosphoreszieren an. Immer jedoch blieb derjenige Trichter der hellere, dessen Basis nach der positiven Seite lag. Bei konstantem Strom und der Röhre *B* funktionierte nur derjenige Trichter, dessen Spitze nach der positiven Seite lag. Aus ihr floß ein rötlicher Büschel, während in der Röhre sonst ein rötlichgrauer Nebel verbreitet war, der die negative Kammer ganz füllte, während er in der positiven vor dem Büschel eine dunklere Stelle übrig ließ. Bei Einschaltung einer Luftstrecke trat das grüne Phosphoreszenzlicht jetzt deutlicher auf. Bei konstantem Strome und der Röhre *C* funktionierte derselbe Trichter, aber zeitweilig auch der andere etwas mit. Der verlängerte Büschel war lichtschwächer, desgleichen der verschwommene Nebel, der sonst in der Röhre lag. Bei Einschaltung einer Luftstrecke trat das Phosphoreszenzlicht besonders deutlich hervor. Das Phosphoreszenzlicht trat also immer erst bei einer Luftstrecke und eher (d. h. schon bei geringerer Evakuierung) bei Konduktoren- als bei verzögerten Flaschen- und Induktionsfunken auf.

Die Hauptfrage aber entschied sich nach den mitgeteilten Versuchen so: Bei einer Evakuierung, welche noch keine Schichtung erzeugt, gehen Entladungen eher durch jenen Trichter, dessen Basis nach der positiven Seite sieht. Bei stärkerer Verdünnung ist es umgekehrt. Dies Resultat gewinnt dadurch an Interesse, daß auch in gewöhnlicher Luft ein isolierender Trichter eher Funken hindurchläßt, wenn seine Basis nach der positiven Seite sieht.¹⁾

Frägt man nach der Ursache, so ist man geneigt, diese mit der Frage zu verschmelzen, an welcher Elektrode die Entladung beginnt. Man pflegt ja anzunehmen, daß jeder Entladung eine Polarisierung der zwischengelagerten Moleküle vorausgeht, und der Ausgleich dann von Molekül zu Molekül fortschreitet. Andererseits ist wahrscheinlich, daß bei jeder Entladung Materie, sei es gewöhnliche, sei es elektrische im

1) W. Holtz, Über das Trichterventil in der Luft, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8. p. 158. 1877.

Sinne des Fortschrittes verschoben wird. Wird aber Stoff verschoben, so leuchtet es ein, daß die Bewegung eher durch einen Trichter hindurchgeht, wenn sie von der Basis nach der Spitze gerichtet ist. Man müßte also annehmen, daß in der Luft und in schwächer evakuierten Röhren die Entladung immer am positiven Pole beginnt, bei stärker evakuierten aber am negativen. Dagegen spricht freilich, daß solche Röhren in der Mitte stets freie positive Elektrizität zeigen und um so mehr, je stärker die Verdünnung ist. Auch spricht etwas dagegen, daß die eigentliche Kathodenstrahlung nicht schon bei der Schichtung, sondern erst bei stärkerer Verdünnung beginnt.

Für die Anfertigung der Ventilröhren bemerke ich noch, daß die Trichterspitzen besser enger als weiter und womöglich nicht weiter als 1 mm sind. Vor allem aber ist es wichtig, daß beide gleich weit sind, weil sonst die Entladung eher immer durch die weitere geht.

(Eingegangen 25. November 1905.)

**12. Die Bestimmung der galvanischen
Polarisation während des Schlusses des
Stromes; von Richard Thöldte.**

Die galvanische Polarisation¹⁾ ist frühzeitig, schon vor dem Ohmschen Gesetz beobachtet worden, und in verschiedener Weise bald als besonderer Übergangswiderstand, bald dadurch, daß man die Zersetzungszelle als Kondensator betrachtete, gedeutet worden. Doch erst die neuen Theorien der Dissoziation der Elektrolyten von Arrhenius und der elektromotorischen Kräfte von Nernst haben die Grundlagen für eine klarere Auffassung geschaffen.

Die mir bekannten bisher veröffentlichten Methoden gestatten eine Bestimmung der Polarisation mittels der Wippe, oder bei Schluß des Stromes nur in Verbindung mit dem Widerstande der Zelle, daher erscheint es nicht uninteressant, ein Verfahren mitzuteilen, durch welches die Polarisation bei geschlossenem Strome ohne Zellenwiderstand bestimmt werden kann, und dessen anderweitige Veröffentlichung mir nicht bekannt geworden ist.²⁾

Methode zur Bestimmung der Polarisation.

Läßt man einen elektrischen Strom mit der elektromotorischen Kraft E und der Intensität J durch ein Galvanometer und durch ein Differentialgalvanometer gehen (Fig. 1), so bestimmt der Ausschlag des Galvanometers die Größe und Richtung des Stromes, während die Nadel des Differential-

1) Die Literatur über Polarisation ist in Wiedemanns Galvanismus und Wüllners Experimentalphysik sowie in den Beiblättern zu den Annalen an den betreffenden Stellen nachzusehen. Außerdem ist zu nennen F. Streintz, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 104. 1895, der mir nicht zugänglich gewesen ist.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 19. p. 213 u. 625. 1883 u. 63. p. 29. 1897; O. Wiedeburg, Wied. Ann. 51. p. 302. 1894; M. Wien, Wied. Ann. 58. p. 37. 1896.

galvanometers in Ruhe bleibt. Für einen solchen geschlossenen Stromkreis gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} J = J_1 + J_2, & J_1 = J_2, & W_1 = W_2, \\ J \left(W + \frac{W_1}{2} \right) = E. \end{cases}$$

Bringt man nunmehr in dem einen Zweige des Differentialgalvanometers eine Zersetzungszelle an, deren elektromotorische Kraft e ist und dem Hauptstrome entgegengesetzt geht, so wird das Gleichgewicht gestört, die Nadel des Differentialgalvanometers wird abgelenkt, zugleich aber auch die elektromotorische Kraft E geschwächt, was durch das Galvanometer angezeigt wird. Um nun die Intensität des Hauptstromes wieder auf die frühere Stärke zu bringen, muß der Widerstand W um W_0 verringert werden. Dadurch, daß im Hauptstrome bald Widerstand ein-, bald ausgeschaltet wird, kann derselbe konstant erhalten werden. Um weiter die Nadel des Differentialgalvanometers auf den Nullpunkt zurückzuführen, muß im anderen Zweige desselben der Widerstand W_4 eingeschaltet werden.

Bezeichnen wir nunmehr den Widerstand der Zelle selbst mit W_3 , so gelten für den verzweigten Stromkreis nach den Kirchhoffschen Gesetzen die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} L \frac{dJ}{dt} + JW + L_2 \frac{dJ_2}{dt} + J_2 W_2 = E, \\ L \frac{dJ}{dt} + J(W - W_0) + L_2 \frac{dJ_2}{dt} + J_2(W_3 + W_3) = E - e, \\ L \frac{dJ}{dt} + J(W - W_0) + L_2 \frac{dJ_2}{dt} + J_2(W_3 + W_4) = E, \end{cases}$$

woraus sich ergibt

$$(3) \quad \frac{J}{2} (W_4 - W_3) = e.$$

In dieser Gleichung kann $J/2$ bestimmt und der Widerstand W gemessen werden. Unbekannt ist nur noch der Widerstand in der Zelle selbst W_3 . Um denselben zu eliminieren, verdoppeln wir die Zelle; dann wird die Nadel des Differentialgalvanometers abermals abgelenkt und kann durch neu eingeschalteten Widerstand W_6 auf den Nullpunkt zurückgeführt

werden. Durch die Verdoppelung der Zelle verwandelt sich die Gleichung (3) in

$$(4) \quad \frac{J}{2}(2W_4 - W_5 - W_3) = 2e.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (3) und (4) erhält man:

$$(5) \quad \frac{J}{2}(W_4 - W_5) = e.$$

In dieser Gleichung sind alle Größen bekannt; J ist die konstant zu erhaltende Intensität des Hauptstromes, W_4 der Widerstand, der bei der einfachen Zelle eingeschaltet und W_5 derjenige, der nach der Verdoppelung angebracht wurde. Dieses Verfahren hat noch den Vorteil, daß man nach jedem einzelnen Versuche eine zweite Messung der Polarisation anstellen und den hieraus resultierenden Wert mit dem zuerst gewonnenen vergleichen kann. Wenn nämlich der Stromkreis geschlossen, die Polarisation in der Zelle also eingetreten ist, auch durch eingeschalteten Widerstand des Differentialgalvanometers wieder auf den Nullpunkt zurückgeführt ist, so wird in dem Augenblicke, in welchem man den Strom unterbricht, die Nadel des Differentialgalvanometers durch die Polarisation, welche andauert, wiederum abgelenkt. Aus der Größe dieser Ablenkung kann man einen Schluß auf die Größe der Polarisation ziehen. Indessen hat diese Probe doch nur einen Wert, wenn die Polarisation nicht allzu groß ist. Ich habe sie nur mit Erfolg bei Zinkelektroden in Zinkvitriol und Kupferelektroden in Kupfervitriol anwenden können. Bei meinen Versuchen mit Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure war die Polarisation so stark, daß das Spiegelgalvanometer meines Differentialgalvanometers stets über die Skala hinausgeschlug.

Vorrichtungen zur Beobachtung und Messung der Polarisation.

Als Galvanometer wurde eine mit Kupferdraht umwickelte Rolle benutzt, die in angemessener Entfernung hinter einem Spiegelmagnet, der sich in einer messingenen Kapsel als Dämpfer befand, aufgestellt war; 80 cm vor dieser Magnetkugel befand sich ein Fernrohr mit Skala. Als Zersetzungs-

zelle wurde ein 45 cm langer, 29 cm breiter und 54 cm hoher Glastrog benutzt. An dem einen Ende desselben wurde die eine Elektrode festgeklemmt, während die andere beliebig hin und her geschoben werden konnte. Zur Regulierung der elektromotorischen Kraft e durch die Zelle wurde ein Rheostat von 130 Windungen Neusilber benutzt. Um endlich den Strom durch das Galvanometer konstant zu erhalten, war in den Stromkreis ein Platindraht eingeschaltet, auf dem ein Schieber hin und her bewegt werden konnte. Haben die Drähte die in nachstehender Fig. 1 gegebene Bezeichnungen, so hatte der positive Strom folgenden Lauf:

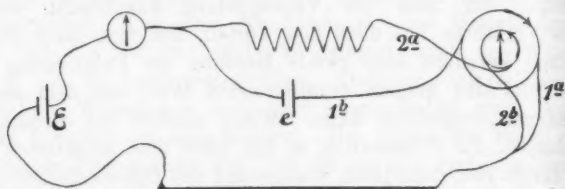


Fig. 1.

Er wurde zunächst aus einem Kommutator in die Rolle des Galvanometers geleitet. Aus diesen herausgetreten, teilte er sich, und zwar ging ein Arm in den Anfang des Rheostaten, der andere in den Anfang der Zersetzungszelle. In das Ende des Rheostaten mündete der Draht 2a des Differentialgalvanometers, in das Ende der Zersetzungszelle der Draht 1b desselben. Durch eine Schraube konnte der Draht 1b leicht und bequem vom Ende der Zersetzungszelle ab und in den Anfang derselben angeschraubt werden, so daß bei dieser letzteren Verbindung zwar ein Strom durch das Differentialgalvanometer, aber nicht durch die Zelle ging. Der Strom durchlief also in den Drähten 2a und 1b das Differentialgalvanometer, kam durch die Drähte 1a und 2b wieder aus demselben heraus, und wurde nun durch einen Kupferdraht, der mit diesen beiden Drähten durch eine Klemmschraube verbunden war, weiter in den Platindraht geleitet, durchlief diesen bis zu dem Schieber und ging von da zum Element bez. Kommutator zurück.

Als Einheit des Widerstandes, durch welchen die Polarisation e bestimmt wurde, habe ich eine Windung des von mir benutzten Rheostaten genommen. Als Einheit des galvanischen Stromes ist derjenige genommen, der in der Rolle 18 cm hinter dem Spiegelgalvanometer aufgestellt, in dem Fernrohr, welches 77 cm vor dem Spiegelmagnet aufgestellt war, eine Änderung der Skala von 500 mm auf 400 mm hervorbrachte; die Entfernung der Skala vom Magnet betrug 80 cm. Dann war der Ablenkungswinkel $\alpha = 3^{\circ} 33' 45''$. Diese Stromstärke bezeichne ich mit α und setzte dieselbe gleich 1.

Lenkte ich den Magneten von 500 bis 300 ab bez. bis 200 und 100, so ergeben sich die Ablenkungswinkel

$$\beta = 7^{\circ} 1' 15'', \quad \gamma = 10^{\circ} 16' 40'', \quad \delta = 13^{\circ} 16' 57'' \quad \text{und} \quad \epsilon = 16^{\circ} 0' 10''.$$

Ich habe diese Stromstärken bez. mit 2, 3, 4 und 5 bezeichnet.

Das Differentialgalvanometer mit Spiegelablesung war vor der Benutzung sehr genau in bezug auf die Richtigkeit untersucht worden.

Beobachtungen der Polarisation.

Um die Methode zu prüfen, wurde zunächst als Zersetzungszelle der Glastrog mit Kupferelektroden in Kupfervitriollösung, und in weiteren Versuchsreihen Zinkelektroden in Zinkvitriollösung in den Stromkreis geschaltet. Da hierbei der Hauptstrom am positiven Pole das Potential vergrößert, so daß an demselben neue Metallionen ebenso in der Flüssigkeit gelöst werden, als am anderen Pole, wo das Potential verkleinert wird, Ionen ihre Ladung abgeben, so kann in beiden Fällen keine Polarisation entstehen. Der Versuch zeigte bei Anwendung aller von mir benutzten Stromstärken, auch wenn die Elektroden verkleinert wurden, ebenso wie auch die auf p. 1063 angegebene Probe, daß in den Fällen, wo die Elektroden völlig rein waren, dieselben sich als unpolarisierbar erwiesen. Die bekannten Resultate wurden also durch die hier gegebene Methode vollauf bestätigt.

Nunmehr wurde chemisch reine Schwefelsäure mit Wasser im Verhältnis von 1:10 gemischt, und als Elektroden Platin verwendet.

Ich habe bei meinen Stromstärken mit Verkleinerung der Elektroden beim Eintauchen auf 50, 40, 30, 25, 20 und 15 mm folgende Werte gefunden.

Tabelle.

	50 mm	40 mm	30 mm	25 mm	20 mm	15 mm
α	91,11	102,36	111,83	117,91	119,23	119,44
β	98,92	113,27	124,85	130,83	132,73	132,73
γ	107,24	119,07	131,5	140,16	144,24	144,27
δ	115,98	135,41	150,25	156,04	156,04	156,04
ε	120,21	141,84	156,25	160,29	160,26	160,27

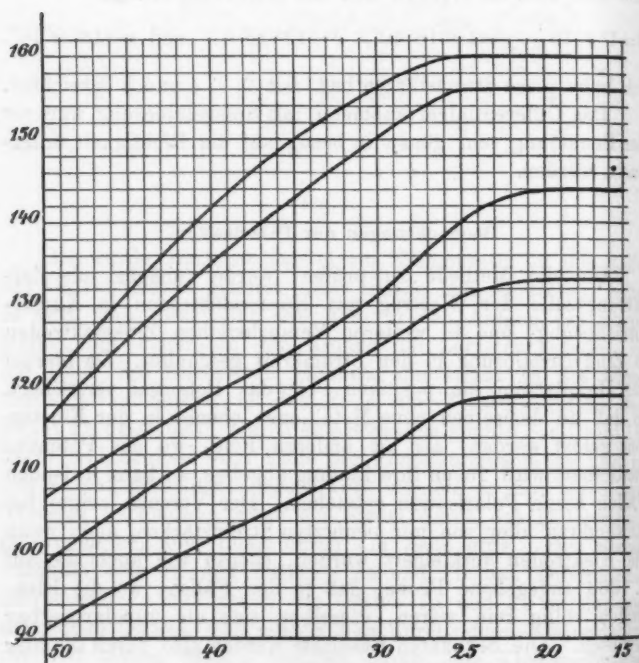


Fig. 2.

Um eine genaue Übersicht zu geben, sind in vorstehender Figur dieselben graphisch dargestellt, indem die verschiedenen

Größen der Elektroden zu Abszissen, die Stromstärken zu Ordinaten gemacht sind.

Die Kurven bestätigen die Abhängigkeit der Polarisation von der Stromstärke. Dieselbe wächst bei schwachen Strömen mit deren Verdoppelung annähernd um eine gleiche Größe, die sich jedoch bei größerer Stromintensität verkleinert und einem größten Werte zustrebt; desgleichen ist sie abhängig von der Größe der in die Flüssigkeit getauchten Elektroden, sie wächst mit Verkleinerung derselben bis zu einem gewissen Maximum, welches sie konstant beibehält.

Unter sich zeigen die Kurven gewisse Schwankungen, die sich durch den Umstand, daß die verwendeten Stromstärken nicht völlig den beigelegten Werten 1, 2, 3, 4, 5 entsprechen, nicht erklären lassen. Fast regelmäßig nimmt die Polarisation bei einem Eintauchen der Elektroden von 20 und 15 mm mit Vergrößerung der Stromintensität zu und ohne Schwankungen steigt sie auch bei Anwendung der größten von mir verwendeten Stromstärken δ und ϵ mit Verkleinerung der Elektroden. Aber gerade diese Versuche waren am schwierigsten auszuführen. Solange nämlich die Wasserzersetzung sich in der Weise bemerkbar macht, daß die Kathode mit *kleinen* Wasserstoffbläschen überzogen ist, so lange läßt sich auch ein Versuch bequem ausführen; denn zu einem solchen gehört, da mehrfache Widerstände eingeschaltet und reguliert werden müssen, immer eine gewisse Zeit. Wenn aber an der Kathode sich *starke große* Blasen bilden, so schwankt das Galvanometer so unregelmäßig hin und her, daß ein bestimmter Wert nicht angegeben werden kann; der ganze Versuch ist nicht zu gebrauchen. Die Ausführung muß in diesen Fällen so geschehen, daß man durch Probierversuche feststellt, wieviel Widerstand ungefähr eingeschaltet werden muß und dann in der *kürzesten Zeit* denselben genau zu regulieren versucht. In dieser Weise sind meine Versuche bei den Stromstärken δ und ϵ und bei Eintauchen der Elektroden von 25, 20 und 15 mm in die Flüssigkeit angestellt; daher die Regelmäßigkeit gegenüber den Schwankungen bei den anderen Intensitäten.

Das Maximum der Polarisation fällt also mit dem Umstande zusammen, daß sich große starke Blasen an den Elek-

troden bilden, sei es bei einer gewissen größeren Stromstärke, sei es bei einer gewissen Verkleinerung der Elektroden. Da die ursprünglich vorhandenen freien Ionen in der Zelle durch den Hauptstrom in Bewegung gesetzt sind, so müssen sich neue Ionen gebildet haben. Und zwar geschieht dies dadurch, daß den mit Wasserstoff überzogenen Platinelektroden, die ich kurz Wasserstoffelektroden nennen will, ebenso eine Lösungstension innewohnt, wie allen Metallen; und weil die Wasserstoffionen in der Flüssigkeit löslich sind, werden Wasserstoffionen nach der Anode, und ebenso natürlich auf der anderen Seite Sauerstoffionen nach der Kathode transportiert; es entsteht die Polarisierung, die somit dem Hauptstrom entgegen gesetzt gerichtet sein muß. Solange nun sich in der Flüssigkeit entgegengesetzt geladene Ionen anziehen und zu neutralen Teilen vereinigen, so lange wächst die Polarisierung. Wenn aber die Neutralisation dieser Ionen an der einen Elektrode ebenso schnell erfolgt als ihre Loslösung von der anderen, so ist das Maximum der Polarisierung eingetreten. Denn die Lösungstension sucht sich weniger geltend zu machen, je mehr Kationen in der Flüssigkeit vorhanden sind. Dies gibt sich bei den Versuchen durch eine sehr lebhaft fast wie wallende Bewegung der Flüssigkeit an den Elektroden zu erkennen. Die Gleichung der Polarisierung $J/2 \times (W_4 - W_8) = e$ zeigt, daß diese dem Ohmschen Gesetz gehorcht. Bei verhältnismäßig größerer Stromstärke nimmt die Polarisierung bei Zunahme der Intensität weniger schnell zu und schließlich hört die Zunahme vollständig auf, dafür nimmt die Differenz $W_4 - W_8$ immer ab. Bleibt die Intensität bei Verkleinerung der Elektroden konstant, so wächst die Differenz, solange die Polarisierung wächst. Wir haben somit folgendes

Resultat:

Das Maximum der Polarisierung von Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure (1:10), welches bei einer Stromstärke mit hinreichender Verkleinerung der Elektroden eintritt, ist ein Beweis dafür, daß keine Vereinigung von entgegengesetzt geladenen Ionen in der Flüssigkeit mehr stattfindet.

So werden durch die hier gegebene Methode nicht nur bekannte Resultate bestätigt, sondern dieselbe ist auch ge-

eignet, einen interessanten Einblick über den Verlauf der Polarisation zu geben.

Die Anfänge dieser Arbeit liegen weit zurück. Die Anregung zu ihr nach dem Verfahren verdanke ich meinem verstorbenen Lehrer Hrn. Geh.-Rat Hankel in Leipzig. Mit Freude und Dankbarkeit denke ich an die schöne Zeit zurück, wo ich die ersten Versuche im physikalischen Institute der Universität Leipzig ausführen durfte.

Dessau, im November 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

13. *Bemerkung zur Abhandlung
von Hr. A. Denizot unter dem Titel:
„Zur Theorie¹⁾ der relativen Bewegung und des
Foucaultschen Pendelversuches“;
von M. P. Rudzki.*

Am Ende seiner im Titel zitierten Abhandlung hat sich Hr. Denizot gegen meine Kritik seiner früheren Abhandlung im „Bull. Ac. des Sc. Cracovie“ gewendet. Darauf kann ich nur antworten, daß Hr. Denizot in seiner *neuen* Abhandlung leider wieder in den *alten* Fehler verfallen ist.

Zwar sind seine Gleichungen (38) auf p. 312 korrekt, wenn man daran festhält, daß X, Y, Z die Komponenten der Erdattraktion im Punkte x, y, z bedeuten, aber gleich auf der nächsten Seite (Gleichung 40) begeht Hr. Denizot seinen alten Fehler. Er setzt nämlich:

$$(40) \quad X - \omega^2 h \sin \varphi = 0, \quad Y = 0, \quad Z - \omega^2 h \cos \varphi - g = 0.$$

Diese Annahme ist aber unerlaubt, sobald man gleichzeitig, wie es Hr. Denizot tut, die kleinen Kräfte (36) (auf p. 312) nämlich

$$(36) \quad \begin{cases} X_f = \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \sin \varphi, & Y_f = \omega^2 y, \\ Z_f = \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

in den Gleichungen (38) beibehält. In der Tat, die ■

$$X - \omega^2 h \sin \varphi \text{ etc. . . .}$$

sind nicht einmal von derselben Größenordnung wie die X_f etc., sie sind numerisch bedeutend größer (siehe weiter) als diese letzten. Dabei bemerke ich, daß die Gleichungen (40) nur in einem Punkte, nämlich im Koordinatenanfang P , streng erfüllt sind, und zwar nur wenn man voraussetzt, daß die z -Achse mit

1) A. Denizot, Ann. d. Phys. 18. p. 299—322. 1905.

der Vertikale in P zusammenfällt. Gleichzeitig verschwinden die Kräfte (36) in diesem Punkte von selbst.

Möge Hr. Denizot seine Gleichungen mit denen von Gauss in dessen aus dem Jahre 1803¹⁾ herrührenden Abhandlung vergleichen. Dort, auf p. 501 oben wird er Ausdrücke finden, die zwar in einer anderen Form doch nichts anderes als seine

$$X - \omega^2 h \sin \varphi + X_r \text{ etc. } \dots$$

darstellen. — Gleich darauf vernachlässigt Gauss diese Ausdrücke, aber ganze, nicht Teile derselben, wie es Hr. Denizot tut.

Vor kurzer Zeit hat Hr. de Sparre²⁾ denselben Gegenstand behandelt. Seine Bezeichnungen sind denjenigen von Hrn. Denizot ganz ähnlich, so daß der Vergleich sehr leicht ausgeführt werden kann. Hr. Denizot kann sich leicht überzeugen, daß de Sparre in seinen Gleichungen neben den X_r auch die $X - \omega^2 h \sin \varphi$ etc. ... geschrieben hat. Er hat diese Kräfte (*approximativ*) berechnet, und zwar hat er folgende Ausdrücke³⁾ dafür gefunden:

$$(A) \quad \begin{cases} -G \frac{x}{R} (1 - 3 \sin^2 \eta) - 3 \omega^2 x \cos \alpha \cdot \sin \lambda \cdot \cos \eta, \\ -G \frac{y}{R} \\ + G \cdot \frac{z}{R} (2 - 3 \sin^2 \eta) - 3 \omega^2 z \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta. \end{cases}$$

Es bedeutet hier G die Erdattraktion, R den mittleren Erdradius, η den kleinen Winkel zwischen den Richtungen der Schwerkraft g und der Erdattraktion G , λ die geographische (bei Hrn. Denizot φ), α die geozentrische Breite. Bezüglich der weiteren Details verweise ich auf die Abhandlung von de Sparre, hier wiederhole ich nur, daß die Kräfte (A), bez. bei Hrn. Denizot die $X - \omega^2 h \sin \varphi$ etc. ..., nicht vernachlässigt werden können, wenn die X_r etc. ... beibehalten werden.

1) Fundamentalgleichungen ... etc. ... Gauss' gesammelte Werke. 5. (Gött. 1867) p. 495—503.

2) M. de Sparre, Bulletin de la Soc. math. de France. 33. p. 65 bis 72 u. 146—150. 1905.

3) l. c. p. 68 u. 70. Herr de Sparre bezeichnet die Kräfte (A) mit X, Y, Z .

Bemerke man nur, daß der Faktor G/R in den Ausdrücken (A) ca. 290mal größer ist als der Faktor $\omega^2 = (2\pi/86164)^2$ in den Ausdrücken (36).

Um dem Leser deutlich vor die Augen zu führen, wovon es sich eigentlich handelt, werde ich die folgende kurze Erklärung geben.

Denken wir uns, es sei im Punkte $P(0, 0, 0)$ der Anfang (fest mit der Erde verbundener) rechtwinkliger Koordinaten, wobei die z -Achse mit der Vertikale in P zusammenfällt. Bekanntlich ist diese Annahme gleichbedeutend damit, daß in P die Schwerkraft in der z -Richtung wirkt, während in den Richtungen x und y keine Kräfte wirken. Gehen wir jetzt zu einem anderen Punkte $M(x, y, z)$ über. Im allgemeinen ist die Richtung, auch die Größe der Schwerkraft in M von der Richtung und Größe der Schwerkraft in P verschieden. Infolgedessen hat man in M kleine Komponenten der Schwerkraft in den Richtungen x und y , während die z -Komponente einen gewissen (positiven oder negativen) Zuwachs erfährt. Nennen wir diese Komponenten und diesen Zuwachs X_g, Y_g, Z_g . Jede von diesen Kräften ist eine Summe von zwei Kräften

$$X_g = X_f + X_a, \dots \text{etc.} \dots$$

X_f, Y_f, Z_f sind die Zuwächse der Zentrifugalkraft, X_a, Y_a, Z_a [mit $X - \omega^2 h \sin \varphi$ etc. . . . gleichbedeutend] sind die Zuwächse der Attraktion, dabei sind die X_a etc. . . . größer als die X_f etc. . . . Unterdes hat Hr. Denizot auf p. 313 seiner neuen Abhandlung, ebenso wie in der alten, die X_f . . . beibehalten und die X_a . . . etc. . . . gestrichen.

Ich füge noch hinzu, daß gewöhnlich, wenn es sich um eine Bewegung in einem kleinen Raume handelt, die kleinen Kräfte X_g (also X_f und X_a gleichzeitig) vernachlässigt werden. Dies ist äquivalent mit der Annahme, daß im betrachteten Raume die Größe und Richtung der Schwerkraft als konstant betrachtet werden können. Wenn man aber die X_g . . . in die Gleichungen aufnimmt, so hat man „*eo ipso*“ angenommen, daß die Richtung und Größe der Schwerkraft von Punkt zu Punkt variieren und die Niveauflächen krumme Flächen sind. Das trifft auch dann zu, wenn man, wie es Herr Denizot irrtümlich getan hat, nur die X_f in die Gleichungen aufnimmt.

Hr. Denizot hat diesen Umstand nicht eingesehen und trotzdem, ebenso wie in seiner älteren Abhandlung, die Schwerkraft als konstant, die Kraftlinien als parallele Geraden angesehen. Es rührt daher, daß Hr. Denizot sich eingebildet hat, daß die Kräfte X_7 etc. . . nicht zur Schwerkraft gehören (vgl. p. 313 u. 314).

Auf verschiedene andere Mißverständnisse in Herrn Denizots neuer Abhandlung gehe ich nicht ein, gleichzeitig erkläre ich auf seine eventuelle Antwort nicht weiter reagieren zu wollen.

(Eingegangen 20. November 1905.)

14. *Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter; von E. Gehrcke.*

(Hierzu Taf. VIII, Figg. 2 u. 3.)

Das Michelsonsche Stufengitter besteht bekanntlich aus einem geschichteten Satz planparalleler Platten, bei welchem Lichtstrahlen von einer Reihe beugender Öffnungen (Stufen) miteinander interferieren; die Gangunterschiede dieser Strahlen sind sehr hoch und bilden eine arithmetische Progression. Die miteinander interferierenden Intensitätsverteilungen der einzelnen Öffnungen erzeugen Interferenzstreifen, deren jeder ein Spektrum von gewisser Ordnungszahl repräsentiert. In dieser Hinsicht ähnelt somit das Stufengitter vollkommen dem gewöhnlichen Beugungsgitter, und dementsprechend ist auch seine Theorie bis auf die Einführung des sprunghaft von Stufe zu Stufe sich ändernden Gangunterschiedes identisch mit der Theorie des gewöhnlichen Beugungsgitters.

In anderer Hinsicht indessen sind beide Apparate sehr verschieden voneinander. Während nämlich beim gewöhnlichen Beugungsgitter der Gangunterschied der interferierenden Strahlen für alles Licht, das von verschiedenen Punkten des (als ideale Linie vorausgesetzten) Kollimatorspaltes her stammt, als *konstant* angesehen werden kann, ist dies beim Stufengitter nicht der Fall. Hier hängt vielmehr der Gangunterschied vom *Neigungswinkel* der auf den Plattensatz auffallenden Strahlen ab; er ist um so kleiner, je näher das einfallende Licht mit der Plattennormale zusammenfällt. Dementsprechend beobachtet man, wie ich zuerst an einem von Hrn. Dr. Hauswaldt in Magdeburg freundlichst geliehenen Stufengitter wahrnahm, bei genügend langem Kollimatorspalt eigentümliche Interferenzstreifen, welche zu den sonst bekannten und berechneten Streifen hinzukommen. Diese neuen Streifen sind sehr verwaschen und wandern bei einer Drehung des Gitters um eine den Längsseiten der Stufen parallele Achse, und zwar zunächst (senkrecht zu dieser Achse) in *einer* Richtung, bis sie still-

stehen und, weitere Drehung im alten Sinne vorausgesetzt, wieder zurückwandern. Die Distanz der Streifen ist am größten in dem genannten Umkehrpunkt ihrer Bewegung; hier fällt die Richtung des einfallenden Lichtes mit der Plattennormale zusammen. Die Gestalt der Streifen ist gekrümmt, doch weicht sie von der Kreisform ab. Gleichzeitig mit dem Auftreten dieser eigenartigen Streifen geht eine Deformation der gewöhnlichen, dem Kollimatorsalt sonst parallel verlaufenden Beugungsstreifen vor sich: letztere erhalten ein schraubenlinienartiges Aussehen.

Es ist klar, daß man die genannten Interferenzstreifen auch mit einer einfacheren Anordnung als mit einem Michelsonschen Stufengitter erhalten muß. In Fig. 1 bedeutet S einen

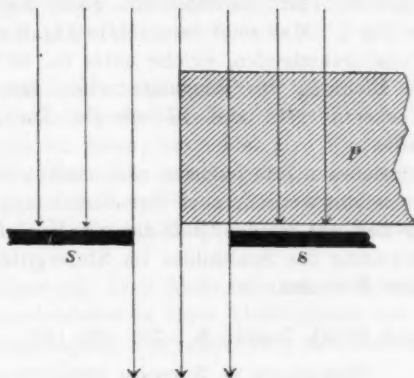


Fig. 1.

Schirm aus Messingblech, in den eine spaltförmige Öffnung von 2 mm Breite und 20 mm Länge eingeschnitten ist. Die Hälfte der Öffnung ist mit einem Stück Planparallelglas p von 5 mm Dicke zugedeckt. Sonach hat man im Prinzip ein Stufengitter vor sich, das aus zwei Stufen von je 1 mm Breite besteht. Beleuchtet man nun diese Anordnung mit parallelem, homogenem Licht in Richtung der Pfeile, so entsteht in einem auf ∞ akkommodierten Fernrohr, welches die durch die Öffnung des Schirmes S tretenden Strahlen vereinigt, die bekannte Interferenzerscheinung der Beugungsbilder zweier dicht neben-

einanderliegender Spalte. Ferner erblickt man im Fernrohr die obengenannten Interferenzstreifen.

In Figg. 2 u. 3, Taf. VIII ist die Erscheinung für die grüne Quecksilberlinie $546\text{ }\mu\mu$, wie sie besonders lichtstark in einer Quecksilberlampe auftritt, photographiert. Die Brennweite des benutzten Fernrohres betrug 30 cm; die wiedergegebenen (negativen) Bilder sind Vergrößerungen der Originale im Verhältnis 1:11. In Fig. 2 war die Neigung des einfallenden Lichtes gegen die Normale der Platte *p* (vgl. Fig. 1) äußerst klein; man erblickt hier nur zwei querliegende, verwaschene dunkle Streifen, während die vertikalen, schraubenförmigen schwarzen Linien die bekannten Beugungsstreifen sind. In Fig. 3 dagegen betrug die Neigung des einfallenden Lichtes etwa 20° gegen die Plattennormale und gegen die Ebene der Zeichnung in Fig. 1. Man sieht demnach in Fig. 3 eine größere Anzahl (20) Interferenzstreifen, welche unter ca. 60° gegen die ursprüngliche Richtung der Beugungsstreifen geneigt liegen; gleichzeitig erkennt man die bedeutende Tordierung der Beugungsstreifen.

Die beschriebenen Interferenzen sind meines Wissens bisher nicht beobachtet worden; auch ihre Berechnung steht noch aus. Es mag bemerkt werden, daß die von Hrn. Laue¹⁾ behandelte Krümmung des Spaltbildes im Stufengitter hier nur von sekundärer Bedeutung ist.

1) M. Laue, Physik. Zeitschr. 6. p. 283—285. 1905.

(Eingegangen 24. November 1905.)

15. Bemerkung

**zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung:
„Über Magnetisierung durch schnell verlaufende
Ströme und die Wirkungsweise des
Rutherford-Marconischen Magnetdetektors“;
von Max Wien.**

Im zehnten Heft des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift hat Hr. E. Madelung¹⁾ über Versuche berichtet, die er über die Magnetisierung durch schnell verlaufende Wechselströme angestellt hat, und gibt an, daß er dabei die Resultate einer früheren Arbeit von mir²⁾ teils bestätigt, teils erweitert hätte.

Die prinzipielle Schwierigkeit aller derartiger Untersuchungen, nämlich die Berücksichtigung der Wirkung der Wirbelströme im Eisen, vermeidet Hr. Madelung von vornherein, seine Versuche ergeben daher im wesentlichen nur den *Einfluß der Wirbelströme auf die Hysteresisschleifen*, über dessen Zunahme mit der Frequenz sie ein übersichtliches Bild geben.

Im Gegensatz dazu hatte ich mir die Aufgabe gestellt, die Hysteresisschleifen in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz *nach Berücksichtigung und Abtrennung der Wirkung der Wirbelströme* darzustellen.

Die Resultate der beiden Arbeiten lassen sich daher nicht vergleichen.

Da in den letzten Jahren mehrfach bei Untersuchungen über die Magnetisierung durch elektrische Schwingungen in diesen Dingen nicht scharf genug unterschieden wurde, hielt ich diesen Hinweis für angezeigt.

Danzig, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, 22. Nov. 1905.

1) E. Madelung, Ann. d. Phys. 17. p. 861. 1905.

2) M. Wien, Wied. Ann. 66. p. 859. 1898.

(Eingegangen 24. November 1905.)

16. Berichtigung zu der Arbeit:
„Reflexion elektromagnetischer Wellen an
einem Draht“;
von W. v. Ignatowsky.¹⁾

p. 506, Ausdruck (3):

statt $(\kappa'^2 - \kappa)$ muß sein $(\kappa'^2 - \kappa^2)$.

p. 511. Im Ausdruck (7) für E_z muß vor dem Zeichen Σ der Faktor 2 stehen.

p. 512, Ausdruck (9):

statt $+\beta_n^2$ muß sein $-\beta_n^2$.

p. 517, Ausdruck (11):

statt $\frac{2i\pi s}{\lambda}$ muß sein $\frac{2i\pi r}{\lambda}$.

p. 518, Ausdruck (13):

statt $\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma r}$ muß sein $\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}$.

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905.

(Eingegangen 16. Dezember 1905.)

Namenregister zum Jahrgang 1905.

A.

Aschkinass, E., Die Wärmestrahlung der Metalle 17, 960. — Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen d. Kohle 18, 373.

B.

v. Baeyer, O., Absorption elektrischer Schwingungen von 70 cm Wellenlänge 17, 30.

Bakker, G., Zur Theorie der Kapillarschicht 17, 471. — Antwort an H. Hulshof 17, 584.

Becker, A., Messungen an Kathodenstrahlen 17, 381.

Behn, U., Über das Verhältnis der mittleren (Bunsenschen) Kalorie zur 15°-Kalorie ($c_{15} - 100/c_{15}$) 16, 653. — Über die Übereinanderlagerung von Halbschatten; Bemerkung zur Arbeit des Hrn. J. Petri: Einige neue Erscheinungen etc. 17, 772.

Betz, W., Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten 18, 590.

Biernacki, V., Über durch galvanische Zerstäubung hergestellte Eisenspiegel 16, 943. — Über einen Halbschattenanalysator 17, 180.

Biske, F., Quarzkeilkolorimeter 16, 406.

Boltzmann, A., Bemerkungen zu Hrn. S. Valentiners Abhandlung: „Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse“ 18, 642.

Bose, E., Über die verallgemeinerte Auffassung einer Formel der kinetischen Gastheorie 16, 155.

Braun, F., Der Hertzsche Gitterversuch im Gebiete der sichtbaren Strahlung 16, 1. — Über metallische Gitterpolarisation, insbesondere ihre Anwendung zur Deutung mikroskopischer Präparate 16, 288. — Einige Beobachtungen, die sich auf künstliche Doppelbrechung beziehen 16, 278. — Einrichtung, um im Vakuum Entfernungen ändern zu

können 16, 416. — Der Mechanismus der elektrischen Zerstäubung; Schmelzen von Kohlenstoff; Zerlegung von Metallegierungen 17, 359. — Optische Doppelbrechung in isotropen, geschichteten Medien 17, 364.

Bronn, J., Über den Zustand der metallischen Lösungen 16, 166.

C.

Christiansen, C., Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Potentialdifferenz 16, 382.

D.

Denizot, A., Zur Theorie der relativen Bewegung u. des Foucaultschen Pendelversuches 18, 299.

Dieterici, C., Über die Flüssigkeitswärme des Wassers und das mechanische Wärmeäquivalent 16, 593. — Die Energieisothermen des Wassers bei hohen Temperaturen 16, 907.

Dorn, E., Heliumröhren als Indikatoren für elektr. Wellen 16, 784.

Drude, P., Rationelle Konstruktion von Teslastransformatoren 16, 116.

E.

Einstein, A., Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt 17, 132. — Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen 17, 549. — Zur Elektrodynamik bewegter Körper 17, 891. — Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? 18, 639.

Einthoven, W., Über eine neue Methode z. Dämpfung oszillierender Galvanometerausschläge 16, 20.

Elmén, G.W., Über elektr. Doppelbrechung in Schwefelkohlenstoff bei niedrigem Potential 16, 350.

Ewers, P., Die Spitzenentladung in ein- u. zweiatomigen Gasen 17, 781.

F.

- Feustel, R., Über Kapillaritätskonstanten und ihre Bestimmung nach der Methode des Maximaldruckes kleiner Blasen 16, 61.
- Forch, C., Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen 17, 744. — Das Molekularvolum des gelösten Naphthalins 17, 1012. — Berichtigung zu der Arbeit: Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen 18, 867.
- Frank, A., Versuche zur Ermittlung des Luftwiderstandes, dessen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Gestalt der Körper 16, 464.
- Fredenhagen, C., Entwurf einer allgemeinen Theorie elektrolytischer Lösungskonstanten und Spannungsreihen, sowie der Löslichkeit u. Dissoziation von Säuren und Basen 17, 285. — Über eine Theorie des elektrischen und dielektrischen Verhaltens der Leiter zweiter Klasse 17, 332.
- Fricke, W., Über Brechungsexponenten absorbierender Flüssigkeiten im ultravioletten Spektrum 16, 865.
- Friedel, J., Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung 18, 1031.
- Fritsch, C., Das Bogenspektrum des Mangans 16, 793.
- Fürstenau, R., Über einige Entladungserscheinungen in evakuierten Röhren 17, 775.

G.

- Gans, R., Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. Erste Mitteilung 16, 516. — Zweite Mitteilung 18, 172.
- Gans, R. u. Weber, R. H., Zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? 16, 172.
- Gehrcke, E., Über eine Interferenzerscheinung am Stufengitter 18, 1074.
- Gildemeister, M. u. Strehl, H., Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen in Wasser 18, 567.

- Gildemeister, M. u. Weiss, O., Über einen zuverlässigen Platinschließkontakt 17, 174.
- Glage, G., F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber 18, 904.
- Goldhammer, D. A., Die Farbensensibilität des Auges und die photometrische Helligkeit der leuchtenden Körper 16, 621.
- Gorton, F. R., vgl. Warburg.
- Greinacher, H., Über die Ursache des Voltaeffekts 16, 708. — Über eine an dünnen halbleitenden Schichten beobachtete Erscheinung 18, 1020.
- Greinacher, H. u. Herrmann, K., Über eine an dünnen Isolatorschichten beobachtete Erscheinung 17, 922.
- Grünberg, V., Farbengleichung mit Zuhilfenahme der drei Grundempfindungen im Young-Helmholtzschen Farbensystem 17, 165.
- Gullstrand, A., Über Astigmatismus, Koma u. Aberration 18, 941.
- Gumlich, E., Versuche mit Heuser'schen Mangan-Aluminium-Kupfer-Legierungen 16, 535.

H.

- Hack, F., Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden linearen Oszillators 18, 634.
- Haentzschel, E., Über die Berechnung der Konstanten a und b der van der Waals'schen Gleichung aus den kritischen Werten 16, 565.
- Hahn, K., Die ladende Wirkung der Röntgenstrahlen 18, 140.
- Hartmann, B., Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Ammann'schen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = x$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen 18, 252.
- Hasenöhr, F., Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. Berichtigung 16, 589.

Hausrath, H., Eine allgemein verwendbare Differentialmethode zur Messung kleiner Widerstände 16, 134. — Die Messung kleiner Temperaturdifferenzen mit Thermoelementen und ein Kompensationsapparat mit konstantem kleinen Kompensationswiderstand bei konstant bleibendem Hilfsstrom 17, 735; vgl. Nernst.

Hensen, V., Über die Umwandlung periodischer Massenanhäufungen in akust. wirksame Bewegungen 16, 838.

Hermann, H., Messung der Wellenlängen roter Linien in einigen Bogenspektren 16, 684.

Hermann, L., Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen 17, 301. — Zusatz zu der Abhandlung: „Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen“ 17, 779.

Herrmann, K., vgl. Greinacher. Heydweiller, A., Über die dielektrische Festigkeit leitender Flüssigkeiten (nach Versuchen von P. Leppelmann mitgeteilt) 17, 346.

Himstedt, F., u. Meyer, G., Über die Bildung von Helium aus der Radiumemanation 17, 1005.

Henning, F., vgl. Holborn.

Holborn, L. u. Henning, F., Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes 18, 739.

Holtz, W., Der negative Büschel mit Stiel und Zweigen in freier Luft 17, 353. — Die wahre Bedeutung der Flügel am Reibzeug der Elektrisiermaschine und ihr Ersatz 18, 1054. — Die Trichterventilröhre beim Wechsel von Druck und Funkenart 18, 1057.

Holtz, A. L., Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden 18, 387.

Hulshof, H., Erwiderung der Bemerkung von G. Bakker 16, 188.

J.

Jäger, G., Zur Theorie d. Maxwell-Boltzmannschen Gesetzes 16, 46.

Jensen, Chr. u. Sieveking, H., Die Verwendung von Mikrophonkontakten für telegraphische Re-

lais und zum Nachweis schwacher Ströme 18, 695.

v. Ignatowsky, W., Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht 18, 495. — Berichtigung zu der Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“ 18, 1078.

Julius, W. H., Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung 18, 206.

K.

Kaempff, F., Größe und Ursache der Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Erzeugung von Doppelbrechung in Metallsiegeln durch Zug 16, 308.

Kahlbaum, G. W. A., Notiz über die verzerrten Bilder, welche durch Radiumbromid auf der photographischen Platte hervorgerufen werden 17, 1009.

Kalähne, A., Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren (Theoretisch) 18, 92. — Über die Strahlung des Chininsulfates 18, 450.

Kapzov, N., Über die Druckkräfte der Wellen, welche sich auf einer Flüssigkeitsoberfläche ausbreiten 17, 64.

King, A. S., Über Emissionspektren v. Metallen im elektr. Ofen 16, 360.

Klöpffel, K., Untersuchung d. Überganges elektr. Ströme zwischen Flüssigkeiten und Gasen 16, 574.

Koch, J., Bestimmung d. Brechungsindizes d. Wasserstoffs, d. Kohlensäure und des Sauerstoffs im Ultrarot 17, 658.

Krigar-Menzel, O., vgl. Rubens.

Kučera, G., Eine Bemerkung zur Arbeit des Hrn. R. Feustel: „Über Kapillaritätskonstanten etc.“ 16, 789. — Über die von den sekund. β - und γ -Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorbrachte Ionisation 18, 974.

Kuenen, J. P., Über die Berechnung der Konstanten α und β der van der Waalschen Gleichung aus den kritischen Werten 17, 189.

L.

Laemmel, R., Notizen über d. Atomwärme fester Elemente 16, 551.

Laue, M., Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien 18, 523.

Lehmann, O., Flüssige Misch- und Schichtkristalle 16, 160. — Die Gleichgewichtsform fester und flüssiger Kristalle 17, 728. — Näherungsweise Bestimmung d. Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle 18, 796. — Drehung der Polarisationssebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen 18, 808.

Leithäuser, G. E., Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen“ 18, 410.

Lenard, P., Über d. Lichtemissionen der Alkalimetalldämpfe und Salze, und über die Zentren dieser Emissionen 17, 197.

Lilienfeld, J. E., Über eine allgemeine u. hervorragend empfindliche Methode zur spektralen qualitativen Elementaranalyse v. Gasgemischen 16, 981.

Lohberg, P., Selbstgegenfritter (Autoantikohärer) 18, 850.

Lotze, A., Untersuchung eines von Breithaupt u. Sohn im Jahre 1903 gebauten Kathetometers 16, 584.

M.

Madelung, E., Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme u. die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors 17, 861.

Malmström, R., Versuch einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie 18, 413.

Matthies, W., Über die Glimmentladung in den Dämpfen der Quecksilberhaloidverbindungen $HgCl_2$, $HgBr_2$, HgJ_2 , 17, 675. — Über die Glimmentladung in d. Halogenen Chlor, Brom, Jod 18, 473.

Melander, G., Über eine violette und ultraviolette Strahlung der Metalle bei gewöhnlichen Temperaturen 17, 705.

Merckens, W., Über strahlenartige Einwirkungen auf die photograph. Bromsilbergelatine 16, 667.

Meyer, G., vgl. Himstedt.

Meyer-Wildermann, Über die

wahren und scheinbaren Gefrier-temperaturen und die Gefriermethoden. (Antwort an Hrn. Hausrath) 16, 410.

N.

Nell, P., Studien über die Diffusionsvorgänge wässriger Lösungen in Gelatine 18, 325.

Nernst, W. u. Hausrath, H., Zur Bestimmung der Gefrierpunkte verdünnter Lösungen (Antwort an Hrn. Meyer-Wildermann 17, 1018.

O.

Olszewski, K., Ein Beitrag zur Bestimmung des krit. Punktes des Wasserstoffs 17, 986. — Weitere Versuche, das Helium zu verflüssigen 17, 994.

Otsuki, C., vgl. Precht.

P.

Panayeff, J. v., Über d. Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle 18, 210.

Petri, J., Einige neue Erscheinungen, welche durch Radiumbromid auf der photographischen Platte veranlaßt werden 16, 951.

Pohl, R., Über das Leuchten bei Ionisation von Gasen. Zur Deutung der Versuche des Hrn. B. Walter 17, 375; vgl. Walter.

Pozdëna, R. F., Versuche über Blondlots „Émission pesante“ 17, 104.

Precht, J. u. Otsuki, C., Strahlungsähnliche Erscheinungen bei Wasserstoffsuperoxyd 16, 890.

Prytz, K., Mikroskopische Bestimmung der Lage einer spiegelnden Fläche. Optischer Kontakt 16, 735. — Poröse Körper als Durchwege für Gase. Poröser Kontakt 18, 617.

Q.

Quincke, G., Über Eisbildung u. Gletscherkorn 18, 1.

R.

Rausch von Traubenberg, H. Frhr., Über den Halleffekt des Wismuts bei hohen Temperaturen 17, 78.

Reiger, R., Lichtelektrische Zerstreuung an Isolatoren bei Atmo-

- spärendruck 17, 935. — Über das Verhältnis e/μ bei Kathodenstrahlen verschied. Ursprunges 17, 947.
- Reinganum, M., Bemerkung zur Elektrooptik der Metalle 16, 958. — Berichtigung 17, 196. — Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur 18, 1008.
- Rempp, G., Die Dämpfung von Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke 17, 627.
- Retschinsky, T., Über die Wiedervereinigung der Ionen in Luft 17, 518; vgl. Stark.
- Riecke, E., Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geisslerschen Röhren 16, 282.
- Rotarski, Th. u. Zemčuznyj, S. F., Pyrometrische Untersuchung einiger „flüssiger“ Kristalle 17, 185.
- Rubens, H., und Krigar-Menzel, O., Flammenröhre für akustische Beobachtungen 17, 149.
- Rubens, H., Über das Emissionsspektrum d. Auerbrenners 18, 725.
- Rudzki, M. P., Bemerkung zur Abhandlung von Hrn. Denizot unter dem Titel: „Zur Theorie der relativen Bewegung u. des Foucaultschen Pendelversuches“ 18, 1070.

S.

- Sachs, J. S., Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie 18, 348.
- Schaefer, Cl., Über das ultrarote Absorptionsspektrum der Kohlensäure in seiner Abhängigkeit vom Druck 16, 93. — Über die selektiven Eigenschaften von Resonatorengittern 16, 106.
- Schaefer, K. L., Über die Erzeugung physikalischer Kombinationstöne mittels des Stentor-telephons 17, 572.
- Schaposchnikoff, A., vgl. Stark.
- Schmaltz, G., Über den Einfluß der Magnetisierung auf die thermische Leitfähigkeit des Nickels 16, 998. — Berichtigung 16, 792.
- Schmauss, A., Über den Vorgang der Abscheidung eines Kolloides im elektrischen Strome 18, 628.
- Schmidt, A., Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1904 17, 378.

- Schmidt, G. C., Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren 18, 869.
- Schmidt, R., vgl. Valentiner.
- Scholl, H., Photoelektrische Erscheinungen am feuchten Jodsilber I. Teil 16, 193; II. Teil 16, 417.
- Schuhknecht, P., Untersuchungen über ultraviolette Fluoreszenz durch Röntgen- und Kathodenstrahlen 17, 717.
- Schwalbe, G., Über die beim Benetzen pulverförmiger Körper, insbes. von Sand, mit Wasser auftretende Wärmetönung, sowie Untersuchungen über das Verhalten von Wasser unter 4° bei diesem Vorgange 16, 32.
- Seitz, W., Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertz'sche Wellen 16, 746.
- Sieveking, S., vgl. Hensen.
- Stark, J., Über zwei Linienspektren des Quecksilbers 16, 490.
- Stark, J., Retschinsky, T. und Schaposchnikoff, A., Untersuchungen über den Lichtbogen 18, 213.
- Stöckert, O., Einige Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. W. Merckens: „Über strahlenart. Einwirkungen auf die photographische Bromsilbergelatine“ 17, 192.
- Strasser, B., Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden 17, 762.
- Strehl, H., vgl. Gildemeister.
- Streintz, F. und Strohschneider, O., Versuche über Metallstrahlung 18, 198.
- Strohschneider, O., vgl. Streintz.
- Szarvassi, A., Über elektromotorische Kräfte und die reversiblen Wärmetönungen des elektrischen Stromkreises 17, 248.

T.

- Tammann, G., Über das Haften von heißem Holzkohlepulver an kalten Körpern 18, 856.
- Thöldt, R., Der Einfluß der Ionisation auf die Leitungsfähigkeit des Kohärrers 17, 694. — Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes 18, 1061.

Toepler, M., Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom) 18, 757.

V.

Valentiner, S., u. Schmidt, R., Über eine neue Methode der Darstellung von Neon, Krypton und Xenon 18, 187.

Voege, W., Ein Beitrag zur Kenntnis der Funkenentladung in Gasen 18, 606.

Voigt, W., Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle 18, 645.

W.

Walter, B., Über eine von den Strahlen des Radiotellurs in der atmosphärischen Luft erzeugte neue Strahlung 17, 367. — Über das Röntgensche Absorptionsgesetz und seine Erklärung 17, 561. — Über einen neuen Kitt für physikalische Apparate 18, 860. — Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen 18, 863.

Walter, B., u. Pohl, R., Über das Eigenlicht des Radiumbromids 18, 406.

Warburg, E., Über die Ozonisierung des Sauerstoffs und der atmosphärischen Luft durch die Entladung aus metallischen Spitzen 17, 1. — Über die Reflexion der Kathodenstrahlen an dünnen Metallblättchen. Nach Versuchen von S. Williams mitgeteilt 17, 977. — Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Hologene bei der Spitzenentladung; nach Versuchen von F. R. Gorton mitgeteilt 18, 128.

Weber, C. L., Zu der Mitteilung von v. Panayeff: Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärmeausdehnung der Metalle 18, 868.

Weber, R. H., Experimentaluntersuchungen zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? 16, 178. — Permeabi-

litätsmessung an Stahlkugeln 18, 395; vgl. Gana.

Weidert, Fr., Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Selen 18, 811.

Weinberg, B., Über die innere Reibung des Eisens 18, 81.

Weiss, O., vgl. Gildemeister.

v. Wesendonk, K., Zur Thermodynamik 16, 558.

Wien, M., Über Telefonplatten mit hohen Eigentönen 18, 1049. — Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. E. Madelung: „Über Magnetisierung durch schnell verlaufende Ströme u. die Wirkungsweise d. Rutherford-Marconischen „Magnetdetektors“ 18, 1077.

Wien, W., Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen 18, 991.

Wiersch, E., Über die Deutlichkeit akust. Reproduktionen unter dem Einfluß der Eigentöne, sowie über Membranen zur möglichst deutl. Wiedergabe der Sprache 17, 999.

Williams, S., vgl. Warburg.

Winkelmann, A., Zu der Abhandlung des Hrn. G. N. St. Schmidt: „Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffs durch Palladium“ 16, 778. — Über die Diffusion naszierenden Wasserstoffs durch Eisen 17, 589.

Wommelsdorf, H., Vereinfachtes Verfahren zur Herstellung vielpoliger Kondensatormaschinen, eine Methode zur Berechnung derselb., sowie eine Hochfrequenzkondensatormaschine 16, 334.

Wörmann, A., Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit Temperatur und Konzentration 18, 775.

Wulff, G., Zur Geometrie der Doppelbrechung 18, 579.

Z.

Zahn, H., Über die transversalen galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in verschiedenen Metallen 16, 148.

Zemčuznyj, S. F., vgl. Rotarski.



A. Gullstrand.



Fig. 2.



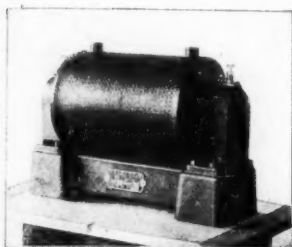
Fig. 3.

E. Gehrecke.



Induktoren und Funkentransformatoren

D. R.-P. System Klingelfuss



von bisher unerreichter Leistungsfähigkeit und Dauerhaftigkeit, von 10—150 cm Funkenlänge. Wir bauen die Induktoren für langsame, mittlere und schnelle Eigenschwingungen entsprechend der Formel $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$. Besonders leistungsfähige Induktoren von 10 cm Funkenlänge an, zum Laden von Kondensatoren.

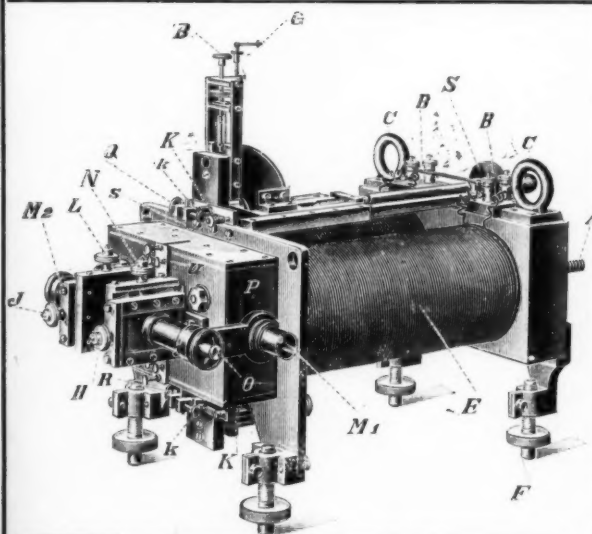
Universal-Induktoren für physikalische Institute.

Neu! Mechanischer Unterbrecher von hervorragender Leistungsfähigkeit.

Fr. Klingelfuss & Co., Basel (Schweiz)

Lizenzinhaber für Frankreich J. Carpentier, Paris.

Illustrierte Preisliste auf Wunsch zu Diensten.



Saitengalvanometer (nach Einthoven)

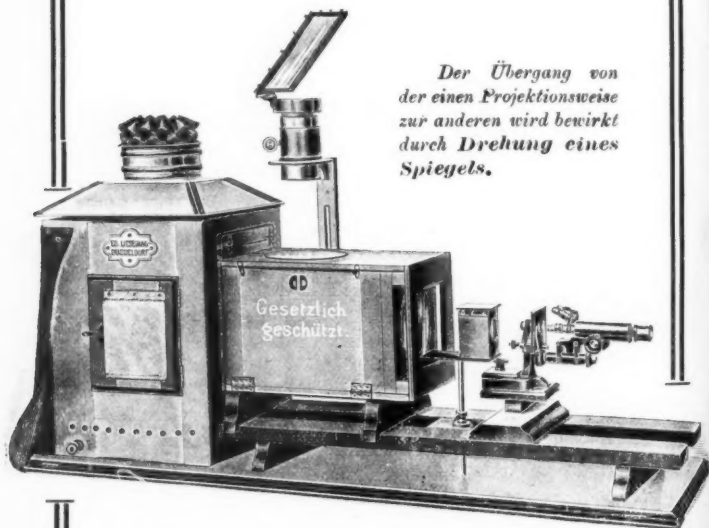
Edelmann-München

Illustrierte Preisliste
gratis und franko

Universal-Projektions-Apparat

Ed Liesegang, Düsseldorf.

Eingerichtet für die Projektion von Glasdiapositiven, Experimenten (horizontal und vertikal), undurchsichtigen Gegenständen (episkopische Projektion), mikroskopische Projektion, ferner für Versuche mit parallelem Lichtstrahlenbündel.



Der Übergang von der einen Projektionsweise zur anderen wird bewirkt durch Drehung eines Spiegels.

Unser

Universal-Projektions-Apparat

ermöglicht es, horizontal und vertikal angeordnete Experimente, Abbildungen aus Büchern, Glasdiapositive, undurchsichtige Gegenstände in beliebiger Reihenfolge zu projizieren, ohne Pause zwischen den einzelnen Darstellungen.

Näheres finden Sie in Liste Nr. 86.

ED. LIESEGANG, == Werkstätten ==
Düsseldorf a. Rh., für
 Projektions-Apparate.
 Vollmerswertherstrasse. Gegründet 1854.

Leppin & Masche

Berlin SO.

Engelufer 17.

Fabrik wissenschaftlicher Instrumente.



Elektrische Centrifugal-
maschine mit regulierbarer
Tourenzahl, D.R.G.M. . . M. 185.—
Zählwerk dazu, mehr . . „ 30.—

Athen 1904: „Goldene Medaille“.

St. Louis 1904: „Grand Prix“.

RICHARD MÜLLER-URI, Braunschweig,

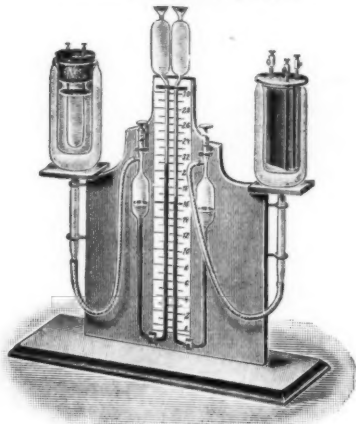
neben der Techn. Hochschule.

Neueste glastechnische Constructionen. Quecksilber-Bogenlampen. Queck-
silberlicht-Röhren. Lichtelektrische Apparate. Thermometer für flüssige Luft.
Elektroskope. Braun'sche Röhren. Stromdemonstrationsapparat D. R. G. M.
Wärmeleitungsapparat D. R. G. M. Original-Vacuumscale etc. etc.

Emil Gundelach

in Gehlberg (Thüringen).

— Gegründet 1852. —



Thermoskop nach Looser.

Weltausstellung St. Louis 1904:
* * * * *
Grand Prix
* * * * *



Schutz-
Marke

Man verlange gratis und franko das

Spezialpreisverzeichnis über Selen-Zellen und Apparate, System Ruhmer,

VON

Ruhmer's Physikalischem Laboratorium. Berlin S.W. 48.

D.R.P. 136094, 142871, 146262, 147113, 149853.
D.R.G.M. 161084, 169259, 195180, 201140.

Für die Leistung der Selen-Zellen, System Ruhmer, ist wohl die Tatsache am bezeichnendsten, daß es mit Hilfe derselben gelang, eine photophonische Übertragung über eine Entfernung von 15 km herbeizuführen, ein bisher mittelst Zellen anderen Systems auch nicht nur annähernd erreichtes Resultat.

Ein neuer Erfolg!

Herr Prof. Dr. A. Korn-München benutzte für seine neuesten erfolgreichen elektrischen fernphotographischen Versuche über 800 km, unter Mitbenutzung der Leitung: München-Nürnberg-München Selenzellen System Ruhmer, ein weiterer schlagender Beweis für deren unübertroffene Güte.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.

Berlin W., Carlsbad 15.

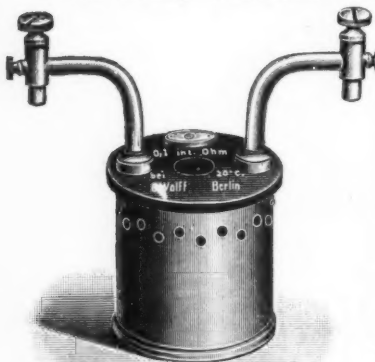
Spezialität seit 1890

Präzisions-Widerstände a. Manganin
nach der Methode
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1890, Nov.-Dezember 1895.)

Normal-Widerstände von 0,0001—100000 Ohm.
— Abzweig-Widerstände von 1—0,00001 Ohm mit Petroleum- oder Luftkühlung, für Strommessung bis 5000 Amp. — Rheostaten, Wheatstone'sche Brücken, Thomson'sche Doppelbrücken für alle Messbereiche, mit Stöpsel- oder Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — Kompensations-Apparate für genaue Spannungsmessung in 5 Modellen. — Normal-Elemente, beglaubigt von der Physik. Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präzisionswiderstände beglaubigt. — Verkaufslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

— Illustrierte Preisliste. —



W. APEL, Universitäts-Mechaniker, Inh. DR. M. APEL.

Geschäftsgründung 1808. Göttingen. Geschäftsgründung 1888.

Chemische und physikalische Apparate.

— Spezialität: —

Rauchgasapparate, Calorimeter zur Bestimmung des Brennwertes der verschiedenen Brennstoffe und von Gasen, nach Ferd. Fischer.

Thermometer nach Ferd. Fischer. (Taschenbuch für Feuerungstechniker.)

Apparat z. Bestimmung d. Dielektricitätsconstanten nach Nernst. (Zeitschr. f. physik. Chemie. XIV, 4.)

Totalreflectometer nach Kohlrausch.

Demonstrationsapparate n. Behrendsen und Grimschl.

Krystallmodelle aus Holz und Glastafeln nach Klein, Naumann und Rose.

Milchprüfungsbestecke nach Tollens.

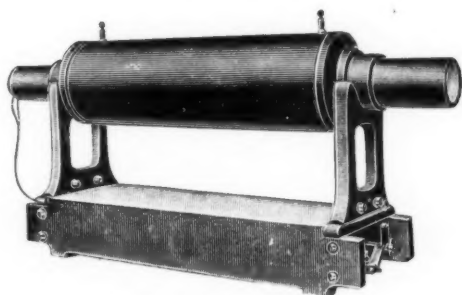
A.E.G.-Funken-Induktoren

für jede gewünschte Funkenlänge.

Quecksilber-Turbinen-Unterbrecher

für Gleichstrom

mit veränderlicher Unterbrechungszahl.



Funken-Induktor.

Quecksilber-Turbinen-Unterbrecher

für Wechselstrom mit Synchronismus-Anzeiger.

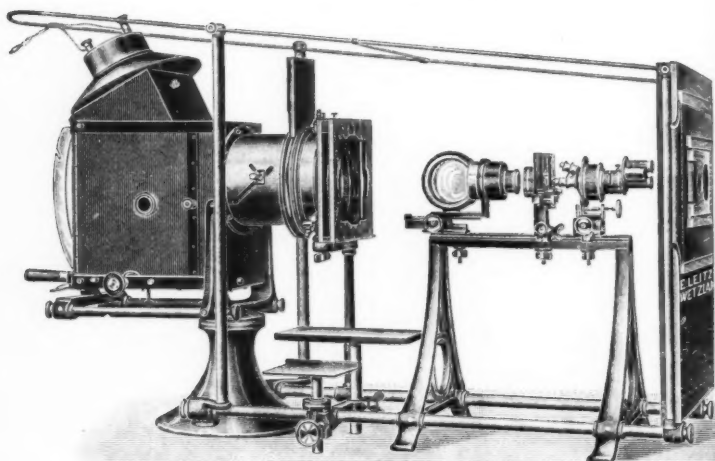
Der Apparat kann als **Wechselstrom-Gleichstrom-Umformer** benutzt werden, zum Laden von Akkumulatoren aus Wechselstrom-netzen usw.

Röntgen-Röhren.

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft
BERLIN.

E. LEITZ

Optische Werkstätte
Wetzlar.



Universal-Projektionsapparat
für diaskopische, mikroskopische und episkopische
Projektion.

== Mikroskope ==

Mikrotome und mikrophotographische Apparate.
Photographische Objektive.

Zweiggeschäfte:

Berlin NW., Luisenstr. 45. Frankfurt a. M., Kaiserstr. 64.
St. Petersburg, Woskressenski 11.

New York, 30 East 18th Str. Chicago, 32—38 Clark Str.

Vertretung für München: Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Dr. Schleussner's Trockenplatten

erfreuen sich auch in wissenschaftlichen Kreisen wegen ihrer hohen **Empfindlichkeit** und **Gleichmässigkeit** einer allgemeinen Beliebtheit.

Spezialitäten: Momentplatten für Astronomische und Röntgen-aufnahmen, für Aufnahmen fliegender Geschosse, Microphotographie und Spectralphotographie. — Orthochromatische Platten, Abzieh-platten für Lichtdruck, Celluloidfolien. — Rollfilms für Tageslicht-cameras.

Trockenplattenfabrik a. Actien

Dr. C. Schleussner, Aktiengesellschaft in Frankfurt a. M.

Koch & Sterzel, Fabrik elektrischer Apparate

Dresden-A.,

Zwickauerstrasse 42



Resonanz-Transformatoren (Funken-Transformatoren)

(s. Annalen IV. Folge, Band 14.)

Laboratoriums-Transformatoren m. vielfach. Spannungsunterteilung f. alle Nieder- u. Hochspannungen bis 200 000 Volt. Hochspannungs-Gleichrichter. Funkeninduktoren bis 150 cm Schlagweite. Komplette Röntgen-Einrichtungen. Wechselstrom-Gleichrichter System Koch.



Doppelwandige Glasgefäße, Pentanthermometer

bis — 200° C. zur flüssigen Luft,

Quecksilberluftpumpen, Röntgenröhren, ff. Glas-schliffe, Marconiröhren usw.

St. Louis 1904

empfehlen

Goldene Medaille.



R. Burger & Co., Berlin N. 4, Chausseestr. 2 E.

Präcisions-Uhr- und Laufwerke,
sowie Räder, Triebe, Zeigerwellen, schräge Triebe und Zahnstangen
fertigt als Specialität

OTTO LINDIG, Glashütte, Sa.

Dr. H. Geissler Nachf. Franz Müller, Bonn a. Rhein.

Wissenschaftliche Glasapparate und Präzisionsinstrumente.

Specialität:

Elektrische Röhren nach *Geissler, Crookes, Puluj, Hittorff, Arons, Lecher etc.* — **Spectralröhren** (Argon- u. Helium-Röhren).
Röntgen-Röhren. — **Braun'sche Kathodenstrahlröhren.**
Tesla-Röhren. — **Luftpumpen** nach *Geissler* und *Töpler-Hagen*.
Rowland's Diffractionsgritter und **Photogramme.**

Feine Thermometer.

Kataloge auf Verlangen.

Alt, Eberhardt & Jäger, Ilmenau i. Th.

Eigene Hohlglashütte, Lampenbläsereien,
Glasschleifereien, Holzwarenfabrik, Thermometerfabriken,
Präzis.-mechanische Werkstatt, Klempnerei, Schriftflaschen-
malerei und Emaillieranstalt.



Glasapparate, Instrumente und Utensilien für
wissenschaftlichen Gebrauch und in jeder
Ausführung. **Hohlglas aller Art.**

Einrichtung für Laboratorien an Lehr-
anstalten, Universitäten usw.

Elektrolytische Apparate für Demonstrations-
und praktischen Gebrauch.

Elektrische Röhren jeder Art, auch nach be-
sonderen Angaben. **Dewargefäße.** Apparate
für Pflanzenphysiologie.

Standgefäße aller Art für Präparate usw.

Chemische Thermometer, tief- u. hochgradig
(bis 550° C.), 1a. fein gekühlt, a. widerstands-
fähigem, weißbelegtem Glase, gut ablesbar.

Thermometer aller Art und für jeden Zweck.

Glasgefäße aus Spiegelglas für mikroskopischen,
spektralanalytischen und speziellen Gebrauch,
widerstandsfähig gegen Wasser, Alkohol und Säuren.

Gewissenhafte Anfertigung. Nachprüfung im eigenen Laboratorium.

400 Arbeiter.



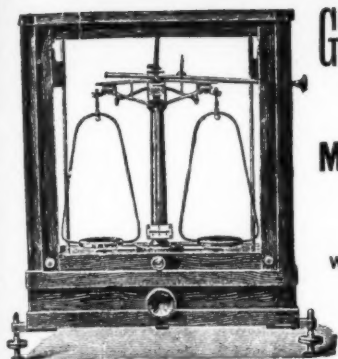
Glasapparate, Glaskörper, Glasplatten usw.
nach besonderen Angaben.

Günther & Tegetmeyer, Braunschweig.

Werkstatt für wissenschaftliche und technische Präzisions-Instrumente.

Weltausstellung St. Louis 1904 Goldene Medaille.

Transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektrizität nach **Exner**.
Elektroskope mit innerer Isolation aus Bernstein, Natriumtrocknung und Einrichtung
zum parallaxenfreien Ablesen (D.R.G.M.). Apparate zur Messung der Elektrizitäts-
zerstreuung in der Luft. Zambonische Säulen. Hochspannungs-Trockensäulen
(D.R.G.M.). Instrumentarien zur Bestimmung der Radioaktivität von Luft- und Boden-
proben. Quadrantenelektrometer. Aktinometer (Neukonstruktion). Wasserstrahl-
duplikatoren nach **Elster** und **Geitel**. Hochspannungselektroskope (**Braun'sches**
Prinzip) mit innerer Isolation und Natriumtrocknung nach **Elster** und **Geitel**.
Transportable Elektronen-Aspirationsapparate nach **Ebert** nebst Zusatzkondensatoren
zur Bestimmung der Ionengeschwindigkeiten und des elektrischen Leitvermögens der
Luft nach der Methode **Maue**. Kondensatoren nach **Harms** zur Bestimmung
der Kapazitäten von Elektrometern.



GEORG WESTPHAL,
Celle (Hannover).

Mechanisches Institut

(gegründet 1860).

Wagen und Gewichte für
wissenschaftliche, chemische und
technische Zwecke

in vorzüglicher Ausführung und
allen Preislagen.

Wegelin & Hübner, A.-G., Halle (Saale)

Maschinenfabrik und Eisengießerei

liefern in vorzüglichster Ausführung:

Gestelle für den Halbring-Elektromagnet

nach Dubois, konstruiert von Professor Dr. Dorn in Halle,

auf fahrbarem Eichenholztisch.

Ermöglichen feine Einstellung
horizontal u. vertikal, sowie Drehung
des Magneten um eine Vertikalachse.

Besonders zweckmäßig für magneto-
optische Beobachtungen.

Weiter: Filterpressen, Extraktions-
Apparate, hydraulische Pressen und
Eismaschinen für Laboratorien.

Offerten auf gef. Anfrage.



Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber:
K. Friedrichs.)

— **Darmstadt.** —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer
Apparate und Gerätschaften.

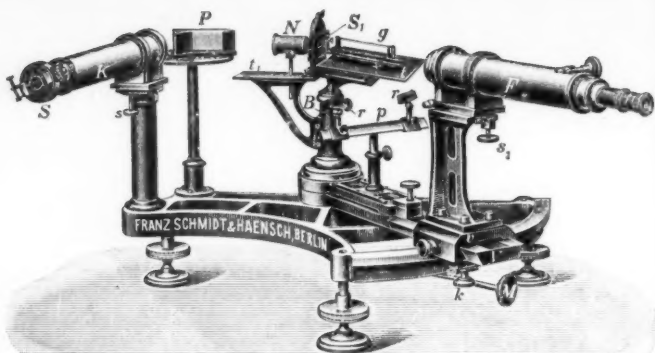
Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer
Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate.
Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und
Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.



Interferenzspektroskop n. Lummer-Gehrcke, geliefert an die Physikal.-techn. Reichsanstalt.

Neue optische Spezialinstrumente

empfehlen

Franz Schmidt & Haensch, Berlin S. 42,
Prinzessinnenstraße 16.

==== **Preislisten kostenlos.** =====

STRASSER & ROHDE, Glashütte i. S.

Werkstätten f. Präzisionsuhrmacherei
und Feinmechanik. Gegründet 1875.

Weltausstellung Paris 1900 Goldene Medaille.
Deutsche Städtelausstellung Dresden 1903 I. Preis.

Spezialität: **Präzisionspendeluhren.**

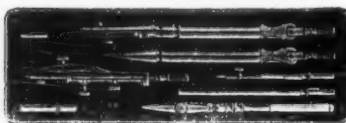


Ausführung von Uhrwerken u. Apparaten
für wissenschaftliche und technische Zwecke.
Mikrometertaster $\frac{1}{100}$ — $\frac{1}{500}$ mm direkt. Ables.

Verlag von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.

MACK, Prof. Dr. KARL, Physi-
kalische Hypothesen und ihre
Wandlungen. Akademische Fest-
rede, gehalten am 19. Nov. 1904
anlässlich der Feier des 86. Stif-
tungsfestes der K. W. Landwirt-
schaftl. Hochschule Hohenheim.
Mit Anmerkungen und Literatur-
nachweisen. [40 S.] 1905.

Kart. Mk. 1.—



Grand Prix: Paris 1900
St. Louis 1904

Illustrierte Preislisten gratis.

Präzisions- **Reisszeuge**

Astronomische Uhren,
Compensationspendel.

Clemens Riefler

Fabrik mathemat. Instrumente
Nesselwang u. München.

Gegründet 1841.

Ferdinand Ernecke

Mechanische Präzisions-Werkstätten

Hoflieferant Sr. Majestät des Deutschen Kaisers.

Berlin-Tempelhof,

— Ringbahnstraße 4. —



Einrichtungen vollständiger
physikalischer und chemischer
Kabinette und Laboratorien.

Kostenanschläge auf Wunsch.

Physikalische Apparate.

Projektions-Apparate.

■ Neu! ■

Differential- und Doppel-
Thermoskop nach Kolbe.

Universal-Schul-Projektions-Apparat Type „NOR“.

Langjährige Spezialität: Starkstromschalttafeln u. fahrbare Schalttische
für Stromstärke und Spannungsregulierung.



DIE UMSCHAU

BERICHTET ÜBER DIE FORTSCHRITTE
HAUPTSÄCHLICH DER WISSENSCHAFT
UND TECHNIK, IN ZWEITER LINIE DER
LITERATUR UND KUNST.

Jährlich 52 Nummern. Illustriert.

»Die Umschau« zählt nur die hervorragendsten
Fachmänner zu ihren Mitarbeitern.

Prospekt gratis durch jede Buchhandlung, sowie den Verlag

H. Bechhold, Frankfurt a. M., Neue Kräme 19/21.

F. Sartorius, Göttingen.

Mechanische Werkstätten zu Göttingen und Rauschenwasser.

Waagen und Gewichte

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

== Specialität: ==

Analysenwaagen

nur eigener bewährtester Construction.

Man verlange ausdrücklich Original-Sartorius-Waagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.



Sartorius' neuer Wärmekasten

zum Brüten von Bacillen und zum Einbetten mikroskopischer Präparate in Paraffin für beliebiges Heizmaterial, unabhängig von Gasleitung, mit vielfach prämiirter Wärmeregulirung.

Patentirt in Deutschland, England, Belgien, Oesterreich-Ungarn etc.

Auf allen beschildigten Ausstellungen prämiirt, zuletzt Weltausstellung Brüssel, Diplom d'honneur und Preis 500 Frs., für beste Construction in Feinwaagen.

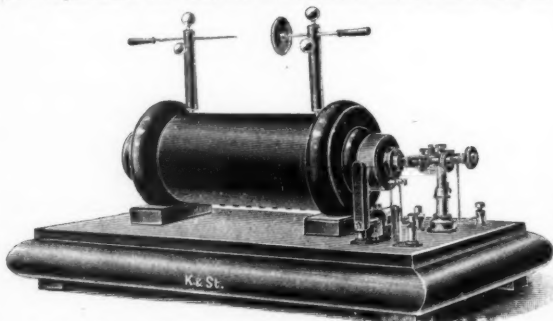
Kataloge in 3 Sprachen gratis und franco.

— Vertreter in allen Ländern. —

KRÖPLIN & STRECKER,

Hamburg-Altona, am neuen Pferdemarkt

bauen als Spezialität: **Funkeninduktoren**



ferner: Demonstrationsapparate für Universitäten und Schulen.
Tesla-Apparate. Röntgen-Apparate. Apparate nach Hertz, Lodge und Lecher.

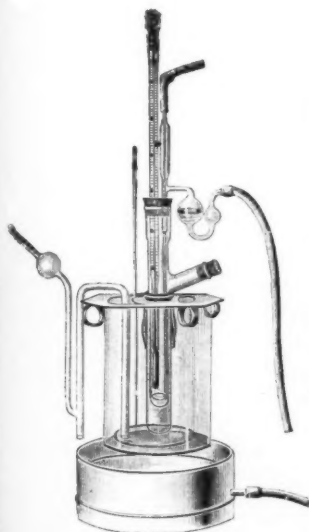
Stationen für Funken-Telegraphie.

Messinstrumente. Zündinduktoren. Technische Artikel für Industrie und Sport.
Funkensivierung.

Arbeitsleistung und Fabrikation von Neuheiten.

A. Haak, Jena.

Glastechnische Werkstätten.



Thermometer

für

Wissenschaft und Technik,

von -200 bis $+575^{\circ}$.

Barometer

mit konstantem Nullpunkt,

eigene Konstruktion.

Elektrische Apparate u. Röhren

nach

Geissler, Crookes, Hittorff, Röntgen,

Puluj, Hertz, Lenard.

Volumetrische Messinstrumente.

Illustrirte Preislisten zu Diensten.

KEISER & SCHMIDT, Berlin N.,

Johannisstrasse 20.



Neues hochempfindliches Spiegelgalvanometer,
Präzisionswiderstände, Melsbrücken, Kompen-
sationsapparate, Präzisions-Ampère- und Volt-
meter für Laboratorien und Schalttafeln,
Galvanometer, Funkeninduktoren, Kondensa-
toren, Rubenssche Thermosäulen, Pyrometer
bis 1600° C., Elemente.



SIEMENS & HALSKE A.-G.

Wernerwerk, Berlin-Nonnendamm,

früher Berliner Werk, Berlin SW., Markgrafenstr. 94.



Präzisions-Wattmeter, -Voltmeter und -Amperemeter für Wechselstrom. Meßeinrichtungen zur Bestimmung der Induktionskonstanten und des Energieverlustes von Wechselstromapparaten. Präzisionsnormale der Selbstinduktion. Zeiger-, Spiegel- und Panzergalvanometer. Meßbrücken, Kompensationsapparate, Zweigwiderstände, Dekadenwiderstände, Kondensatoren.

Dr. Steeg & Reuter,

Optisches Institut,
Homburg v. d. Höhe.

Specialität:

Apparate und Präparate

zur Polarisation, Interferenz, Beugung, Fluorescenz, Phosphorescenz des Lichts.

Orientirte Schliffe

von Mineralien und künstl. Krystallen.

Präparate

aus Kalkspath, Quarz, Steinsalz, Gyps und Glimmer.

Spectral-Apparate, Glasprismen und Linsen aller Art. — Röntgenschirme.



Unger & Hoffmann, Aktien-Gesellschaft.

Gegründet 1878 DRESDEN - A. 16 Gegründet 1878

Projektionsapparate

für wissenschaftliche Zwecke, für Schulen, Lehranstalten, öffentl. Vorträge.

Sämtl. Gebrauchsartikel für Projektion.

Alle Lichtquellen. Laterndiapositive in reichster Auswahl.

Preislisten und fachmännische Auskunft jederzeit zu Diensten.

E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

Grands - Prix

Expositions Universelles

Paris 1889 — Anvers 1894
Bruxelles 1897 — Paris 1900
St. Louis 1904 — Liège 1905

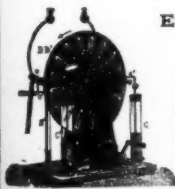
Cabinets de physique complets.

Appareils de Mesures électriques.

Télégraphie sans fil Popoff-Ducretet garantie pour les grandes distances. Téléphone haut-parleur R. Gaillard, type 1905, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence.

Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.

Catalogue Général, 5e édition, Physique générale, 3 fr.



HANS BOAS BERLIN O.

Elektrotechnische Fabrik

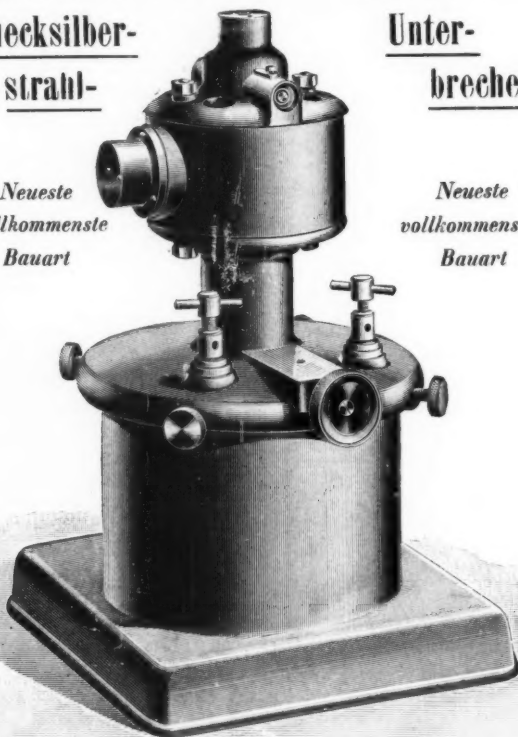
Krautstraße 52

Quecksilber-
strahl-

Unter-
brecher

*Neueste
vollkommenste
Bauart*

*Neueste
vollkommenste
Bauart*



Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

**Konstante
elektromotorische
Kraft.**

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.

Alleiniger Fabrikant: Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstr. 72/73.



**Keine Dämpfe
kein Geruch.**

Keine Polarisation, da-
her keine Erschöpfung.

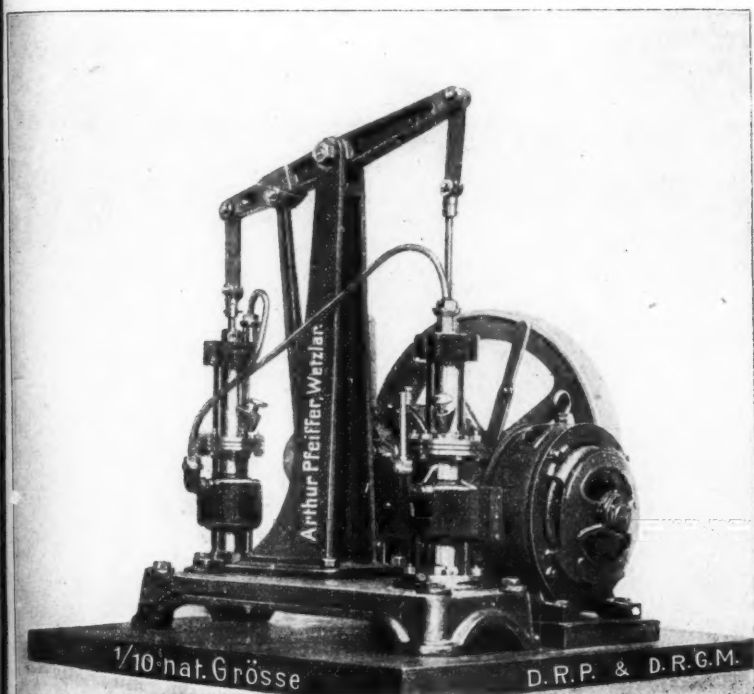
**Betriebsstörungen
ausgeschlossen.**

ARTHUR PFEIFFER, Wetzlar O.

Werkstätten für Präzisionsmechanik und -Optik.

— Gegründet 1890. —

Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation der
Patent-Geryk-Öl-Luftpumpen
in Deutschland.



Komplette Pumpeinrichtung für Hand- und Motorbetrieb ($\frac{1}{10}$ P.S.).

== Durch Patente und Gebrauchsmuster geschützt. ==

Jederzeit, ohne Vorbereitung, zum Gebrauch fertig.

Die Geryk-Pumpe ist die denkbar einfachste und betriebssicherste Konstruktion aller Flüssigkeitspumpen und giebt nach Jahren noch die unverminderte Leistung, wie sie von keiner ähnlichen Konstruktion erreicht wird.

Universal-Induktorium

nach Wydts

Beschreibung und Kostenanschlag
wird auf Wunsch zugesandt.

ED. LIESEGANG

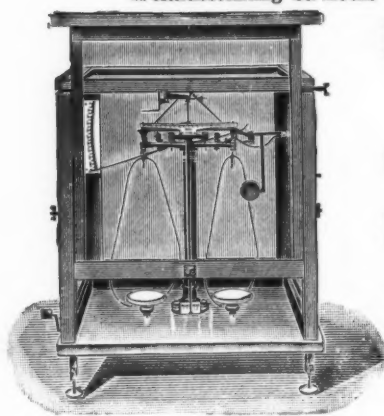
Düsseldorf-Unterbilk.

Spezialfabrik für Projektionsapparate
und Funkeninduktoren.

PAUL BUNGE

HAMBURG, Ottostrasse 13.

Nur erste Preise auf sämtlichen beschickten Ausstellungen.
Bruxelles 1897 — Diplome d'honneur und Extra-Ehrenpreis von
Fr. 500.—, Weltausstellung Paris 1900 — Grand Prix.
Weltausstellung St. Louis — Grand Prix.



Mechanisches Institut,

gegründet 1866.

Spezialität:

**Physikalische und analytische
Waagen**

in garantirt vorzüglicher Aus-
führung und allen Preislagen.

**Schnelltschwingende
Waagen für Chemiker.**



== Preislisen ==
in Deutsch, Französisch und
Englisch kostenfrei.



Lambrecht's Hygienisch-Meteorologisches Observatorium.

Dieses Instrument ist neben „Lambrecht's Wettertelegraph“ eine anderweitige Vervollständigung des Lambrecht'schen Holosteric-Barometers. Durch die Vereinigung von Barometer und Polymeter wird über **meteorologische, hygienische** (siehe die Broschüre „Gesunde Luft“ von Dr. Fleischer) und **technische** Fragen eine Auskunft erteilt, die neben wissenschaftlicher Zuverlässigkeit dem Laien verständlich ist und zugleich lehrreiche Unterhaltung bietet.

Vermittels des Barometers erhält man die allgemeine Wetterprognose, während das Polymeter, außer zur Prüfung des Luftfeuchtigkeits-Gehalts im Zimmer, auch noch zu meteorologischen Beobachtungen verwendet werden kann, für welchen Zweck dem Instrument eine ausführliche Gebrauchsanweisung beigegeben wird.

Man verlange ausdrücklich
Preisliste No. 39 mit Anerkennungen.

Wilh. Lambrecht, Göttingen

Gegründet 1859.

(Georgia Augusta)

Inhaber des Ordens für Kunst und Wissenschaft, der großen
goldenen und verschiedener anderer Staatsmedaillen.

Vertreter an allen größeren Plätzen des In- und Auslandes.

Generalvertrieb für die Schweiz, Italien und die österreichischen Alpenländer durch:
C. A. Ulbrich & Co. in Zürich.

MAX KOHL, Chemnitz i. S.



Werkstätte für Präzisionsmechanik,

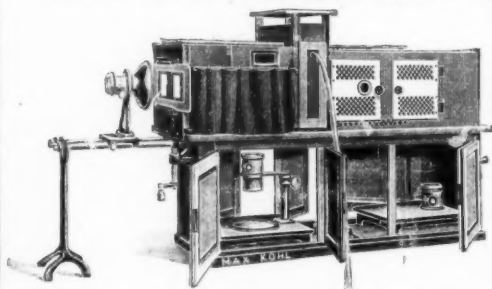
liefert als langjährige Spezialität:

Physikalische und chemische Einrichtungsgegenstände für Schulen, wie z. B. Experimentiertische n. Prof. Dr. Weinhold u. Prof. Arendt, Fensterverdunkelungen, Oberlichtverdunkelungen für Elektromotor- u. Handbetrieb, Absaugmaschinen mit Gas- u. Wasserpumpen, Leitungseinbau Wandtafelgestelle, Projektionsrollschirm mit oder ohne Elektromotorbetrieb.

Vollständige Einrichtungen von physikalischen und chemischen Auditorien in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Derartige komplette Einrichtungen wurden jetzt u. a. für das I. Chemische Institut der Universität Berlin, Hofmann-Haus Berlin, Laborat. f. angew. Chemie der Universität Leipzig, Phys. Institut Universität Leipzig, Ecole d. Mines du Hainaut, Mons (Belgien), Kommerzschule Riga (Russland), Technolog. Institut Tomsk (Sibirien), höhere Masch.-Bauschule Stettin u. v. a. m. geliefert.

Im Auftrage des Reichs-Kommissars habe ich den Hörsaal der Deutschen Unterrichts-Ausstellung St. Louis für das Preuß. Kultus-Ministerium ausgestattet. Prämiert mit dem Grand Prix.



Neu! Kohl's Megadiaskop

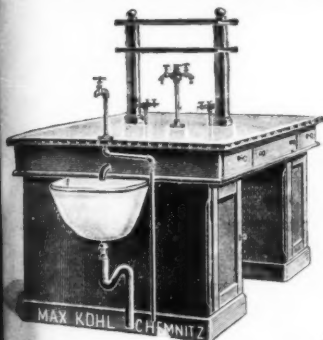
(gesetzlich geschützt)

Apparat zur Projektion im auffallenden u. durchfallenden Licht, zur Mikroskopprojektion, zur Projektion des Mikroskops, Präparation, Polarisation, Spektralanalyse, Interferenz, Beugung des Lichts.

Vollkommenster Apparat der Gegenwart. * Man verlange Spezial-Prospekt.

MAX KOHL, Chemnitz i. S.

Arbeits-(Praktikanten-)Tische
in allen möglichen Ausführungen,
ganz den jeweiligen örtlichen Ver-
hältnissen angepaßt.



Experimentier-Schalttafeln

Lehranstalten und Laboratorien, als Wandtableau und in fahrbarer Tischausführung, gestatten die Verwendung von Stromes städtischer Centralen, bis 110, 160, 220 Volt und oder 30 Amp. für alle im Experimentalunterricht vor-

kommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und große Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden. Höhere Spannungen als wie eingestellt, treten auch bei Stromunterbrechung nicht auf. — Es ist damit also einem wirklichen, lang gefühlten Bedürfnis abgeholfen. Ia. Referenzen.

Man verlange Spezial-Prospekt!

D. D. Thermoskope nach Kolbe
in neuester, verbesserter Ausführung.

Doppelsirene nach Helmholtz
mit Zählwerk, verbesserter Ein- und Ausschaltung, elektrischem Kontakt für das elektrische Pendel, Luftvertheilungsrohr und Zugfesthaltung.

**Doppelt wirkende
rotierende Öl-Luftpumpen (D. R. P.),**
zum Auspumpen von großen Gefäßen, auch für Chemiker vor-
züglich geeignet, für Hand- oder Motorbetrieb eingerichtet.

Neu! Spinthariskope Neu!
mit Phosphoreszenzschirm und einer kleinen Menge Radium-
bromid auf beweglichem Zeiger, um die außerordentlichen radio-
aktiven Eigenschaften des Radiums zu zeigen.

Preis M. 12.— u. 28.—.

Radiumbromid
von Überraschender Wirkung; chemisch rein.
Preis auf Anfrage.

Weltausstellung Lüttich 1905: **2 Grands Prix!**

Weltausstellung St. Louis 1904: **Grand Prix und Gold-Medaille,**
erhalten in der Sonderausstellung des Kgl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im
Auftrage der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der
deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Extradiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.
Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.

Lieferanten mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

E. Leybold's Nachfolger, Cöln

Doppelprisma

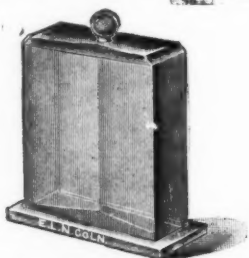
zur objektiven Darstellung der Interferenzstreifen

nach

Winkelmann-Abbe.

(Ztschr. f. Instrumentenkunde XXII, p. 275, 1902.)

(Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht XVII, p. 288, 1904.)



Preis M. 18.—

Das Fresnelsche Doppelprisma bildet die eine Seite eines rechteckförmigen, durch Stöpsel verschließbaren Glaskroges; die brechende Kante des Glasprismas ist dem Inneren des Glaskastens zugekehrt. Der Glastrog wird mit Benzol gefüllt.

Ein vertikaler Spalt wird auf den Schirm projiziert und das Prisma in einer Entfernung von 15–20 cm vor dem Spalt (zwischen Spalt und Objektivlinse) aufgestellt. Durch sorgfältiges Drehen des Spaltes läßt sich erreichen, daß Spalt und brechende Kante genau parallel sind. Bedeutet δ die Entfernung zweier heller Streifen auf dem Schirm, D die Entfernung des Schirmes vom Prisma, d die Entfernung zweier

Spaltbilder, so ist $\lambda = \frac{d \times \delta}{D}$. Um d zu messen, bringt man

zwischen Doppelprisma und Schirm eine achromatische Linse und stellt diese so, daß auf dem Schirm die beiden Spaltbilder scharf auftreten; die Entfernung dieser Spaltbilder sei $= a$. Jetzt entfernt man den Spaltansatz und bringt an dessen Stelle eine Millimeterteilung. Die Entfernung zweier Teilstriche auf dem Schirm sei $= b$; es ist dann $d = \frac{a}{b}$.

Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr. 6.**

Mit einer Beilage der **J. B. Metzler'schen Buchhandlung, Stuttgart.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

